

THESE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Sciences de l'Univers

présentée et soutenue par

Vincent ETIENNE

Modélisation de la propagation d'ondes sismiques par éléments finis discontinus et inversion des formes d'onde dans les milieux élastiques à trois dimensions

Thèse dirigée par **Stéphane OPERTO** et **Jean VIRIEUX**
préparée au laboratoire Géoazur, Sophia-Antipolis
financée dans le cadre du Consortium SEISCOPE

soutenue le 25 Janvier 2011 devant le Jury

Stéphane GAFFET	Chargé de recherche au CNRS	Examineur
Dimitri KOMATITSCH	Professeur à l'Université de Pau	Rapporteur
Stéphane LANTERI	Directeur de recherche à l'INRIA	Examineur
Guust NOLET	Professeur à l'UNSA	Examineur
Stéphane OPERTO	Chargé de recherche au CNRS	Directeur de Thèse
René-Edouard PLESSIX	Chercheur à SHELL	Rapporteur
Jean-François SEMBLAT	IDTPE au LCPC	Examineur
Jean VIRIEUX	Professeur à l'UJF	Directeur de Thèse

A Miranda, Joachim et Lucas.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse, Stéphane Operto et Jean Virieux, pour m'avoir permis de réaliser ce travail doctoral dans le cadre du consortium SEISCOPE. J'ai passé, en leur compagnie, des années riches sur le plan scientifique et sur le plan humain, dans un contexte dynamique et motivant. Je leur suis reconnaissant de m'avoir fait confiance pour mener ce projet de recherche sur la modélisation et l'inversion des ondes sismiques. Leurs implications, leurs conseils, leurs bienveillances et leurs soutiens m'ont été très précieux et je voudrais, à travers ces quelques lignes, leur exprimer mes plus sincères remerciements.

Je remercie Dimitri Komatitsch et René-Edouard Plessix d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également Stéphane Gaffet, Stéphane Lantéri, Guust Nolet et Jean-François Semblat, d'avoir accepté de participer au jury.

Pendant la thèse, j'ai eu la chance de rencontrer, discuter et interagir avec de nombreuses personnes. Je remercie en premier lieu Nathalie Glinsky de l'INRIA Sophia-Antipolis / CETE Nice pour nos innombrables discussions autour des méthodes numériques de type éléments finis avec approximation Galerkin discontinue (GD). Une partie non négligeable de ce mémoire ayant attiré au travail effectué dans le cadre du projet E-2VP, je tiens à remercier Emmanuel Chaljub du LGIT de Grenoble pour m'avoir permis de participer à ce projet et ainsi me mesurer à 'la fine fleur' en matière de modélisation sismique. Je remercie également Olivier Coutant du LGIT pour m'avoir donné la possibilité de faire de jolies simulations dans le modèle du volcan de la Soufrière. Je remercie Emeline Maufroy avec qui j'ai partagé le statut de thésard à Géoazur, avec ses hauts et ses bas, et dont la collaboration a permis d'appliquer la méthode GD développée dans cette thèse à l'étude des effets de site topographiques.

Je remercie également les personnes avec qui j'ai pu entamer une collaboration afin d'aborder de nouvelles perspectives. A ce titre, je remercie Diégo Mercerat pour sa suggestion et son aide pour l'introduction des ordres élevés en espace dans la méthode GD.

Je remercie également Victor Cruz Atienza et Josué Tago de l'UNAM de Mexico pour avoir réalisé l'extension de la méthode GD à l'étude de la rupture sismique.

Je remercie les personnes que j'ai croisées au sein du consortium SEISCOPE. En particulier, je remercie Alessandra Ribodetti qui a été une source intarissable d'encouragements et de conseils avisés. Je remercie également les étudiants avec qui j'ai eu l'occasion de partager un 'bout de thèse' comme : Hafedh Ben-Hadj-Ali, Romain Brossier, Yasser Gholami, Yuelian Jia et Vincent Prioux. J'ai une pensée spéciale pour Clara Castellanos et Guanghui Hu qui m'ont épaulé sur le volet de l'inversion 3D et qui poursuivront ce travail dans leurs thèses respectives.

Je n'aurais pas pu mener à bien ce travail sans l'accès à des plateformes de calcul intensif et sans l'assistance du personnel technique rattaché à ces plateformes. Je remercie particulièrement Alain Minuissi de l'Observatoire de la Côte d'Azur, Lionel Morino et Caroline Ramel de Géoazur ainsi que le staff de l'IDRIS.

Enfin, je remercie l'ensemble du personnel et des étudiants de Géoazur, trop nombreux pour tous les citer, qui ont fait de ces 3 années, une des plus belles périodes de ma vie.

Je terminerai par remercier et féliciter Miranda, ma femme, et Joachim et Lucas, mes deux enfants, pour la patience dont ils ont dû faire preuve à mon égard. Qu'ils se rassurent, je ne recommencerai pas une deuxième thèse !

Résumé

Le travail présenté dans cette thèse concerne la modélisation et l'inversion des ondes sismiques. La première partie du mémoire est consacrée à la modélisation sismique 3D à l'aide d'une méthode de type éléments finis par approximation Galerkin discontinue. Cette méthode repose sur l'utilisation de maillages tétraédriques non-structurés qui permettent d'adapter localement la discrétisation en fonction des propriétés du milieu (h-adaptivité). Afin d'obtenir un raffinement local des maillages, la construction des maillages s'effectue selon un processus itératif. Cette adaptivité est un élément crucial pour réaliser des modélisations précises dans des milieux avec des topographies complexes et/ou des forts contrastes des propriétés. En outre, la méthode offre la possibilité d'adapter l'ordre d'approximation dans chaque élément (p-adaptivité). Des études numériques illustrent l'intérêt de combiner l'adaptivité en espace et en ordre (hp-adaptivité) dans des cas réalistes (bassin sédimentaire, massif, volcan). Des comparaisons avec d'autres approches permettent d'évaluer la précision et l'efficacité de la méthode.

La deuxième partie du mémoire concerne l'inversion des ondes sismiques dans le but de reconstruire les paramètres élastiques (vitesses des ondes P et S) des milieux. Le problème inverse est formalisé dans le domaine fréquentiel bien que les champs d'ondes soient calculés dans le domaine temporel (à l'aide notamment de la méthode présentée dans la première partie). Cette approche hybride temps/fréquence est appropriée pour les milieux élastiques 3D. Le gradient de la fonction coût, que l'on cherche à minimiser dans le problème inverse, s'obtient à l'aide des champs d'onde fréquentiels extraits via une transformée de Fourier discrète des champs temporels. Afin de faciliter la mise en oeuvre de l'inversion, il est proposé d'utiliser une formulation pseudo-conservative de l'équation d'onde dans le but de simplifier l'expression du gradient. Le découplage entre les discrétisations du problème direct et du problème inverse est également proposé dans le but d'obtenir une approche flexible et adaptée aux milieux étudiés. Des exemples simples d'inversion dans des cas synthétiques concluent ce mémoire.

Abstract

This PhD thesis concerns the modelling and the inversion of seismic waves. The first part of this study refers to the seismic modelling with a discontinuous Galerkin finite element method in 3D. The method makes use of unstructured tetrahedral meshes where the discretisation can be adapted locally according to the medium properties (h-adaptivity). In order to achieve the local refinement, meshes are built with an iterative process. This adaptivity feature is a crucial point for accurate simulations in models with complex topographies and/or large properties contrasts. Moreover, the method yields the possibility to adapt the approximation order in each element (p-adaptivity). Several numerical studies illustrate the benefit to combine both the spatial and approximation adaptivities (hp-adaptivity) in some realistic cases (sedimentary basin, mountain, volcano). Some comparisons with other approaches allow to evaluate the accuracy and the efficiency of the method.

The second part of this study is related to the inversion of the seismic waves with the objective of retrieving the elastic parameters (P and S waves velocities) of the medium. The inverse problem is formalised in the frequency domain while the seismic wavefields are computed in the time domain (with for instance the method presented in the first part). This time/frequency hybrid approach is adequate in the case of 3D elastic media. The gradient of the cost function, which we try to minimise in the inverse problem, is obtained from the frequency wavefields extracted via a discrete Fourier transform from the time wavefields. In order to ease the implementation of the inversion scheme, we propose to use a pseudo-conservative form of the wave equation which simplifies the expression of the gradient. Besides, we propose to separate the discretisation of the direct problem and the discretisation of the inverse problem with the aim of getting a flexible approach tailored to the geological targets. Some simple inversion tests conclude this study.

Acronymes

ADER : *Arbitrary DERivatives*

CPML : *Convolutional Perfectly Matched Layer*

CPU : *Central Processing Unit*

DF : Différences Finies

DOF : *Degree Of Freedom*

ED : Éléments Discrets (ou Éléments Distincts)

EF : Éléments Finis

ES : Éléments Spectraux

FWI : *Full Waveform Inversion*

GB : *Giga Bytes*

GD : (approximation par méthode) Galerkin Discontinue

GLL : Gauss-Lobatto-Legendre

GPU : *Graphical Processing Unit*

MB : *Mega Bytes*

MPI : *Message Passing Interface*

M-PML : *Multi-axial Perfectly Matched Layer*

PGV : *Peak Ground Velocity*

P_k : Polynôme de degré k

PML : *Perfectly Matched Layer*

PS : Pseudo Spectral

RTM : *Reverse Time Migration*

SPMD : *Single Program Multiple Data*

TFD : Transformée de Fourier Discrète

VF : Volumes finis

Table des matières

Introduction générale	19
I Modélisation des ondes sismiques	27
1 Introduction sur les méthodes numériques pour la propagation des ondes sismiques	29
1.1 Différentes classes de méthodes	30
1.1.1 Différences finies	30
1.1.2 Méthodes pseudo-spectrales	32
1.1.3 Éléments finis	33
1.1.3.1 Un peu d'histoire	33
1.1.3.2 Éléments finis standards	33
1.1.3.3 Éléments spectraux	34
1.1.3.4 Éléments finis discontinus	35
1.1.4 Autres méthodes et méthodes hybrides	36
1.2 Équations de propagation	37
1.2.1 Système élasto-dynamique	37
1.2.2 Système acoustique	41
1.2.3 Forme pseudo-conservative	42
1.2.4 Cas 1D	43
1.3 Méthodes par éléments finis	44
1.3.1 Principes de base	44
1.3.1.1 Notion d'élément	44
1.3.1.2 h -adaptivité	45
1.3.1.3 Approximation via des fonctions de base	45
1.3.1.4 Formulation faible	48

TABLE DES MATIÈRES

1.3.2	Formulation discontinue	49
1.3.2.1	Flux centrés	51
1.3.2.2	Flux décentrés	52
1.3.2.3	p -adaptivité	54
1.3.2.4	Cas des volumes finis	54
1.3.3	Formulation continue	55
1.3.3.1	Éléments finis standards	55
1.3.3.2	Éléments spectraux	56
1.3.4	Discrétisation temporelle	57
1.3.4.1	Schéma saute-mouton	57
1.3.4.2	Condition de stabilité	58
1.3.4.3	Schémas d'ordres élevés	58
1.3.5	Conditions initiales	59
1.3.5.1	Etat initial	59
1.3.5.2	Source ponctuelle	59
1.3.6	Conditions aux limites	59
1.3.6.1	Surface libre	59
1.3.6.2	Bords absorbants	60
1.3.7	Etude de convergence	63
1.3.7.1	Mode propre fondamental	63
1.3.7.2	Précision <i>versus</i> discrétisation spatiale	65
1.3.7.3	Précision <i>versus</i> temps de calcul	66
2	Méthode par éléments finis discontinus avec maillages tétraédriques	69
2.1	Construction des maillages 3D	70
2.1.1	Notions générales sur les maillages	70
2.1.2	Techniques de maillage	71
2.1.2.1	Technique <i>octree</i>	71
2.1.2.2	Technique par avancée de front	72
2.1.2.3	Triangulation de Delaunay	72
2.1.3	Types de maillages	75
2.1.3.1	Maillage hexaédrique	75
2.1.3.2	Maillage tétraédrique	76
2.1.3.3	Maillage hybride	77
2.2	Méthode par éléments finis discontinus en 3D	79
2.2.1	Présentation de l'article	79

2.2.2	Summary	79
2.2.3	Introduction	80
2.2.4	DG-FEM formulation	83
2.2.4.1	Elastodynamic system	83
2.2.4.2	Spatial discretisation	84
2.2.4.3	Time discretisation	88
2.2.5	Computational aspects	88
2.2.6	Source excitation and boundary conditions	90
2.2.6.1	Source excitation	90
2.2.6.2	Free surface condition	91
2.2.6.3	Absorbing boundary condition	91
2.2.7	Accuracy of DG-FEM with tetrahedral meshes	101
2.2.7.1	Convergence study	102
2.2.7.2	Accurate modelling of surface waves	104
2.2.8	<i>hp</i> -adaptivity	106
2.2.8.1	Two-step refinement approach	106
2.2.8.2	Numerical results	107
2.2.9	Application to complex medium	109
2.2.9.1	Description of EUROSEISTEST verification and validation project	111
2.2.9.2	Numerical results	112
2.2.10	Perspectives and conclusions	116
2.2.11	Lagrangian basis functions	119
2.2.12	Matrices used in the DG-FEM formulation	120
3	Applications de la méthode par éléments finis discontinus	123
3.1	Le projet E-2VP	124
3.1.1	Cadre du projet	124
3.1.2	Description des modèles	124
3.1.3	Construction des maillages	127
3.1.4	Résultats numériques	127
3.1.4.1	Résultats pour le modèle A	128
3.1.4.2	Résultats pour le modèle B	137
3.1.4.3	Résultats pour le modèle C	140
3.2	Le massif de Rustrel	144
3.2.1	Description du modèle	144

3.2.2	Objectifs de la modélisation	144
3.2.3	Construction du maillage	146
3.2.4	Résultats numériques	147
3.3	Le volcan de la Soufrière	150
3.3.1	Un volcan actif	150
3.3.2	Objectifs de la modélisation	151
3.3.3	Construction du modèle	152
3.3.4	Construction du maillage	154
3.3.5	Résultats numériques	155
 II Inversion des ondes sismiques		161
 4 Inversion des formes d'onde en domaine fréquentiel		163
4.1	Principes généraux, contexte et enjeux	164
4.1.1	Introduction	164
4.1.2	Un problème d'optimisation locale	165
4.1.3	Calcul du gradient et principe d'imagerie	166
4.1.4	Un problème inverse mal posé	171
4.1.5	Domaine temporel <i>versus</i> domaine fréquentiel	172
4.1.6	Historique de l'inversion des formes d'onde	176
4.1.6.1	Les premiers pas	176
4.1.6.2	Émergence de l'approche fréquentielle	177
4.1.6.3	Un champ de recherche actif	177
4.1.6.4	Vers une imagerie 3D multi-paramètres	177
4.1.7	Motivation de ce travail	179
4.2	Formulation du problème inverse en fréquence	180
4.2.1	Fonction coût	180
4.2.2	Linéarisation du problème inverse	181
4.2.3	Équations normales	182
4.2.4	Expression du gradient	182
4.3	Construction des gradients	184
4.3.1	Calcul des champs monochromatiques	184
4.3.1.1	Approche par solveur direct	184
4.3.1.2	Approche par schéma explicite en temps	188
4.3.2	Bénéfice de la formulation pseudo-conservative	192

4.3.3	Gradient de V_P	194
4.3.4	Gradient de V_S	198
4.3.5	Gradient de ρ	199
4.3.6	Recherche du pas de descente	200
5	Choix stratégiques, algorithmes et applications	203
5.1	Choix de la méthode numérique	203
5.2	Abstraction entre problème direct et problème inverse	205
5.2.1	Découplage des paramétrisations	205
5.2.2	Discrétisation arbitraire de l'inversion	206
5.2.3	Du problème direct au problème inverse	208
5.2.4	Et <i>vice versa</i>	208
5.3	Algorithme général	209
5.4	Quelques applications dans des cas simples	212
5.4.1	Inversion avec les différences finies	212
5.4.1.1	Cas I : modèle acoustique	212
5.4.1.2	Cas II : modèle élastique	216
5.4.2	Inversion avec les éléments finis discontinus	217
5.4.2.1	Description du modèle	217
5.4.2.2	Construction du maillage	217
5.4.2.3	Dispositif d'acquisition	219
5.4.2.4	Résultats numériques	219
	Conclusions et perspectives	229
	Bibliographie	239
A	Compléments sur la formulation GD	271
A.1	Élément de référence	271
A.2	Fonctions de base Lagrangiennes	272
A.3	Calcul des matrices	272
B	Valorisation des compétences	275
B.1	Cadre général et enjeux de la thèse	275
B.1.1	Présentation du projet de thèse	275
B.1.2	La thèse dans son contexte	276
B.1.3	Moi dans ce contexte	277

TABLE DES MATIÈRES

B.2	Déroulement, gestion et coût du projet	278
B.2.1	Préparation et cadrage du projet	278
B.2.2	Conduite du projet	278
B.2.3	Evaluation et prise en charge du coût du projet	280
B.3	Compétences, savoir-faire, qualités professionnelles et personnelles	280
B.3.1	Domaines d'expertises scientifique et technique	280
B.3.2	Méthodes de travail et gestion de l'information	281
B.3.3	Communication	282
B.3.4	Qualités professionnelles et personnelles	282
B.4	Retombées et impacts de la thèse	282
B.4.1	Pour l'équipe et les partenaires du projet	282
B.4.2	Sur le plan professionnel et personnel	283

Introduction générale

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans deux thématiques majeures en Sciences de la Terre : la modélisation et l'inversion des ondes sismiques dans les milieux géologiques à 3 dimensions.

Modélisation sismique

Des enjeux scientifiques et sociétaux

La Terre est une planète vivante dont l'activité sismique n'a cessé de marquer l'histoire par l'occurrence d'importants séismes comme celui de San Francisco en 1906 (figure 1). Depuis les temps anciens, les hommes ont tenté d'appréhender ces phénomènes et imaginé



FIG. 1 – Destructions dans la ville de San Fransisco lors du séisme du 18 avril 1906 (Magnitude 7.9), source : site internet du *Virtual Museum of the City of San Francisco*.

divers dispositifs afin de retrouver certaines de leurs caractéristiques (figure 2.a.), mais

ce n'est qu'à fin du XIX^{ème} que la sismologie moderne a vu le jour grâce à l'avènement des sismographes (figure 2.b). De l'enregistrement des premiers sismogrammes jusqu'à

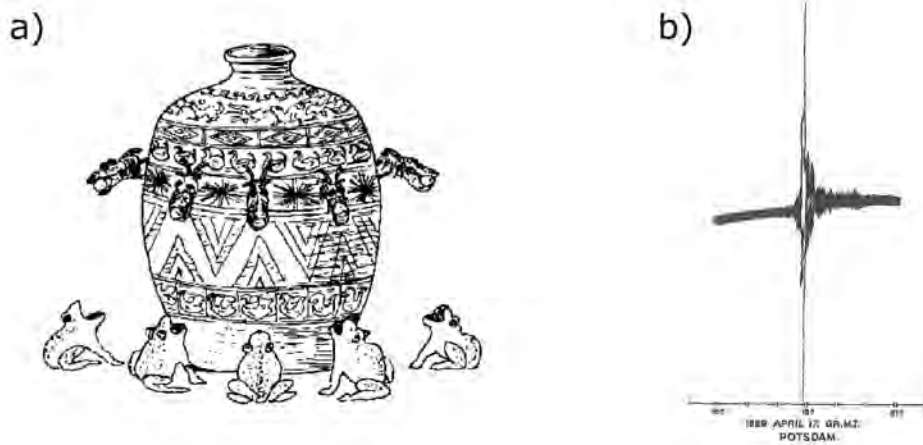


FIG. 2 – (a) Sismoscope chinois, année 132. Cette jarre de bronze est ornée de 8 dragons disposés selon des directions cardinales et qui, sous l'impulsion de secousses telluriques, laissent tomber de leur bouche une boule indiquant la direction du séisme (Source USGS). (b) L'un des tout premiers sismogrammes à grande distance, enregistré à Postdam le 17 avril 1889, relatif à un séisme survenu au Japon, d'après Bolt (1982).

la modélisation aujourd'hui possible des mouvements du sols engendrés par des séismes localisés de l'autre côté du globe (pour des périodes de l'ordre de la seconde¹), une longue route a été parcourue. Les sismologues et les géophysiciens ont développé un ensemble d'outils numériques qui permettent de simuler la réponse du milieu terrestre aux sollicitations mécaniques qu'elles soient d'origines naturelles ou anthropiques. Les enjeux de la modélisation sismique sont multiples. Outre les applications scientifiques en sismologie, les enjeux sociétaux sont du premier rang et comprennent l'étude du risque sismique, la surveillance d'essais nucléaires, ou encore l'exploration et l'exploitation des ressources naturelles qui font appel à des procédés d'imagerie à haute résolution.

Dans le souci d'accroître précision et efficacité, des efforts continuels sont entrepris afin d'améliorer les méthodes existantes ou d'en explorer de nouvelles. La démarche entreprise dans cette thèse s'inscrit dans ce cadre et un premier volet de la thèse a

¹Actuellement, il est envisageable de calculer des sismogrammes à l'échelle globale pour des périodes entre 1 et 2 secondes (Carrington *et al.*, 2008). Cependant, les ressources informatiques requises sont telles, en terme de nombre de processeurs et de temps de calcul, qu'il s'agit pour l'instant de modélisations expérimentales dans le but de tester la robustesse des outils de modélisation.

consisté à développer une méthode par éléments finis discontinus adaptée à des contextes géologiques variés. En effet, selon les cas étudiés, nous devons faire face aux contraintes décrites ci-dessous.

Présence de topographie

La modélisation du champ d'onde complet nécessite la prise en compte d'une rhéologie élastique, siège de phénomènes de propagation complexes en particulier au niveau de la surface libre. Afin de modéliser correctement les ondes de surface qui s'y développent, les méthodes numériques requièrent une discrétisation de la topographie aussi fidèle que possible.

Fort contraste des propriétés

Dans certains modèles géologiques, la plage des vitesses de propagation peut s'étendre au delà d'un ordre de grandeur. C'est le cas des modèles qui présentent superficiellement des couches à basses vitesses (comme des sédiments avec des vitesses de l'ordre de la centaine de m/s) et des couches profondes à hautes vitesses (de l'ordre du km/s). On comprend alors l'intérêt de rechercher des méthodes adaptatives capables de densifier localement la discrétisation en fonction des propriétés du milieu, pour optimiser l'utilisation des ressources de calcul.

Contact fluide-solide

Dans les modèles marins, une attention particulière doit être accordée à l'interface fluide-solide. En premier lieu, la jonction d'un milieu acoustique et d'un milieu élastique implique des discontinuités du champ d'onde le long de l'interface. Ces discontinuités nécessitent généralement des conditions explicites qu'il est plus ou moins aisé d'implémenter selon les méthodes numériques employées. Deuxièmement, la bathymétrie présente une problématique similaire à celle de la surface libre en terme de discrétisation.

Milieus fracturés

Certains contextes géologiques, comme les réservoirs faillés, sont caractérisés par un ensemble de failles aux géométries complexes. La prise en compte des fractures par les

méthodes numériques pose deux types de difficulté : le premier est en rapport avec les problèmes de discrétisation des plans de faille, le second est lié aux conditions mécaniques sur l'interface qui requiert comme dans le cas du contact fluide-solide, l'implémentation de conditions explicites.

Taille conséquente des problèmes

Les modélisations dans les milieux à 3 dimensions peuvent aboutir à des problèmes numériques de l'ordre du milliard d'inconnues ou davantage si l'on considère des applications en sismologie globale. On recherche donc des méthodes qui permettent de tirer pleinement profit des plateformes de calcul parallèle haute performance qui peuvent atteindre de nos jours plusieurs dizaines ou centaines de milliers de processeurs.

Inversion des ondes sismiques

Des enjeux scientifiques et sociétaux

L'inversion des ondes sismiques permet de recouvrer certaines propriétés des structures géologiques, comme la vitesse des ondes P dans la cadre d'une inversion acoustique ou bien la combinaison des vitesses des ondes P et S dans le cadre d'une inversion élastique. On peut également réaliser des inversions de la densité et des facteurs d'atténuation. S'il reste bien des questionnements scientifiques sur les mécanismes internes de la Terre qui nécessitent des techniques d'imagerie de plus en plus pointues, l'inversion sismique est un enjeu crucial pour le secteur énergétique et en particulier pour l'industrie pétrolière à des fins d'exploration ou d'exploitation des réservoirs d'hydrocarbures. L'inversion de données sismiques est également un outil précieux pour la surveillance de zones sensibles comme les sites de stockage de déchets radioactifs ou les sites de séquestration de CO₂, enjeu majeur du XXI^{ème} siècle.

L'inversion des formes d'ondes

En terme d'imagerie sismique quantitative, l'approche qui a longtemps prévalu est la tomographie des temps de première arrivée qui repose sur un processus de minimisation des écarts entre les temps de première arrivée observés dans les données et ceux relatifs aux données calculées. Généralement basée sur l'approche asymptotique du tracé

de rai, la tomographie permet une reconstruction des grandes longueurs d'onde du modèle de vitesse. Une autre approche est la migration des traces sismiques qui consiste à repositionner les interfaces (en sismique, on parle habituellement de réflecteurs) dans le domaine spatial (c'est-à-dire en profondeur). L'approche la plus complète de migration est la *reverse time migration* (RTM), qui permet de focaliser l'énergie sismique contenue dans les sismogrammes en lieu et place des réflecteurs moyennant la connaissance d'un macro-modèle suffisamment précis (ce dernier étant généralement le résultat d'une tomographie des temps des premières arrivées ou des phases réfléchies). Cette approche, qui a été développée récemment, est désormais généralisée dans l'industrie pétrolière. Les techniques de migration ont donc pour but de fournir une image hautement résolue par reconstruction des hauts nombres d'onde du modèle. Par conséquent, que ce soit avec la tomographie des temps d'arrivée ou les techniques de migration, les longueurs d'onde moyennes du modèle sont difficilement accessibles. C'est en partie pour palier à cette lacune que l'inversion des formes d'ondes a été formalisée dans les années 80. En anglais on parle de *full waveform inversion* et nous conserverons l'usage de l'acronyme anglais FWI dans la suite du texte. Cette technique consiste à exploiter la totalité de l'information contenue dans les sismogrammes (amplitude et phase) et nécessite des outils de modélisation précis afin de reproduire des sismogrammes synthétiques comparables aux données observées.

Une variété de modèles

Si théoriquement, la FWI peut s'appliquer indifféremment à des modèles de tailles radicalement différentes, il n'en demeure pas moins que le coût numérique représente la principale limitation. En effet, la nécessité de calculer des sismogrammes précis et ce, pour un grand nombre de sources, fait de la FWI une méthode relativement lourde. C'est pourquoi, au cours de la dernière décennie, la plupart des travaux ont porté sur des modèles à 2 dimensions. Mais récemment, sous l'effet de la croissance de la puissance de calcul disponible, des applications 3D ont vu le jour, aussi bien dans le domaine académique avec des cibles de taille continentale que dans le cadre d'applications industrielles visant des résolutions de l'ordre de la dizaine de mètres dans des modèles de plusieurs kilomètres de profondeur.

Un volume conséquent de données

L'inversion des formes d'onde peut s'appliquer à des données multi-composantes comme celles enregistrées par les sismomètres de fond de mer (*Ocean Bottom Seismometer*, OBS) habituellement utilisés par la communauté académique (figure 3.a) ou des câbles sous-marins (*Ocean Bottom Cable*, OBC) plutôt employés en exploration géophysique pétrolière (figure 3.b). Le nombre de sismogrammes à considérer est généralement élevé et l'inversion de ces données requiert d'importantes ressources informatiques. A titre d'exemple, l'acquisition sismique présentée sur la figure 3.b a permis l'enregistrement de plus de 120 millions de sismogrammes. Pour réduire les besoins informatiques associés à la manipulation d'importants volumes de données temporelles, l'approche fréquentielle a été introduite au début des années 90. Dans cette approche, seules quelques fréquences discrètes sont utilisées dans l'inversion, tout en préservant une bonne résolution des modèles reconstruits. Le deuxième volet de la thèse a été dédié au développement d'une

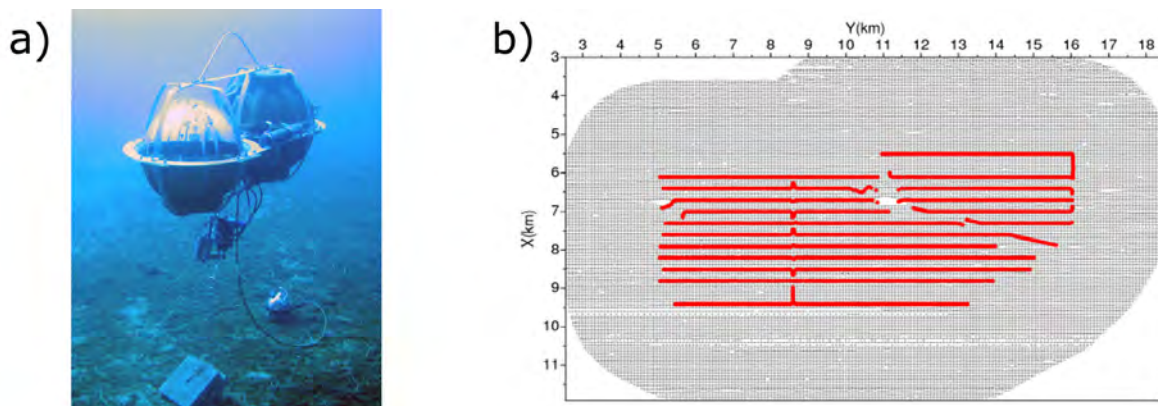


FIG. 3 – (a) OBS de type Hippocampe développé par le laboratoire Géoazur. Cette instrument est composé de deux sphères qui contiennent l'instrumentation électronique et les batteries ainsi que d'un capteur 3 composantes qui repose au fond de la mer, source laboratoire Geoazur. (b) Acquisition sismique marine déployée en mer du Nord dans la zone de Valhall. Les points noirs représentent l'emplacement des tirs au canon à air (environ 50 000 tirs) et les lignes rouges représentent les câbles de fond de mer totalisant 2414 récepteurs, d'après Sirgue *et al.* (2009).

méthode d'inversion des formes d'ondes dans le domaine fréquentiel, en s'appuyant sur le développement de la méthode par éléments finis discontinus introduite plus haut. Pour mener à bien ce développement, nous nous sommes efforcés de considérer une approche d'une part flexible afin d'aborder des modèles variés et d'autre part robuste vis-à-vis de

la taille des problèmes considérés.

Le plan du mémoire

La première partie de ce mémoire est dédiée à la modélisation des ondes sismiques. Dans le premier chapitre, une revue des méthodes numériques est présentée et une introduction aux éléments finis est abordée de manière détaillée à l'aide de l'équation d'onde 1D. Nous présentons les principaux concepts associés à cette méthode en distinguant les formulations continues et discontinues. Tous les aspects liés à la modélisation d'ondes sismiques, en particulier les conditions aux limites, sont également présentés. L'approche discontinue avec flux centré attirera particulièrement notre attention car elle est l'objet du développement à 3 dimensions de la méthode qui est au coeur de ce travail de thèse. Ce développement est présenté dans le second chapitre sous la forme d'un article. Nous développons une méthode par éléments finis discontinus basée sur des maillages tétraédriques en privilégiant des ordres faibles. Nous discutons les bénéfices de cette approche numérique qui offre une grande flexibilité en terme d'adaptivité aussi bien en espace que dans le choix des ordres d'approximation. Nous attachons également une importance aux conditions absorbantes qui, dans certains cas, sont le siège de phénomènes d'instabilité numérique. Nous présentons une validation de l'approche dans le cadre du projet *Euroseistest Verification and Validation Project* (E-2VP) dédié à l'étude des effets de site dans un bassin sédimentaire. Une revue sur la construction des maillages à 3 dimensions, un aspect crucial des méthodes par éléments finis, complète ce chapitre. Le troisième chapitre est consacré aux applications de la méthode dans des contextes géologiques variés. On s'intéresse à des modèles avec des topographies significatives comme le volcan de la Soufrière ou le massif de Rustrel et nous concluons ce chapitre par une analyse détaillée des résultats obtenus lors du projet E-2VP qui permettent de 'mesurer' l'adéquation de notre approche par rapport à d'autres méthodes.

La deuxième partie du mémoire concerne l'inversion des formes d'ondes. Dans le quatrième chapitre, nous présentons l'approche en domaine fréquentiel et introduisons l'extraction de champs d'ondes fréquentiels à partir de méthodes temporelles telles que celle que nous avons présentée dans la première partie. Nous proposons une construction des gradients qui tire profit d'une formulation pseudo-conservative de l'équation d'onde et qui permet une totale abstraction entre les problèmes direct et inverse. Ce concept est l'objet du chapitre 5 où nous introduisons également le choix modulaire que nous avons privilégié afin de pouvoir adapter la méthode numérique vis-à-vis des modèles étudiés.

INTRODUCTION

Nous concluons ce chapitre avec quelques exemples d'inversion qui illustrent le potentiel de l'approche que nous avons développée. Enfin, nous terminons par les conclusions et les perspectives que suggèrent l'approche par éléments finis discontinus et le procédé d'inversion que nous avons mis au point.

Première partie

Modélisation des ondes sismiques

Chapitre 1

Introduction sur les méthodes numériques pour la propagation des ondes sismiques

Sommaire

1.1	Différentes classes de méthodes	30
1.1.1	Différences finies	30
1.1.2	Méthodes pseudo-spectrales	32
1.1.3	Éléments finis	33
1.1.4	Autres méthodes et méthodes hybrides	36
1.2	Équations de propagation	37
1.2.1	Système élasto-dynamique	37
1.2.2	Système acoustique	41
1.2.3	Forme pseudo-conservative	42
1.2.4	Cas 1D	43
1.3	Méthodes par éléments finis	44
1.3.1	Principes de base	44
1.3.2	Formulation discontinue	49
1.3.3	Formulation continue	55
1.3.4	Discrétisation temporelle	57
1.3.5	Conditions initiales	59
1.3.6	Conditions aux limites	59
1.3.7	Etude de convergence	63

1.1 Différentes classes de méthodes

De nombreuses applications, allant du calcul de sismogrammes en sismologie globale à l'inversion des formes d'ondes dans des milieux à l'échelle kilométrique, requièrent une modélisation des champs d'onde aussi précise que possible. S'il existe des solutions analytiques dans certains cas, comme pour un demi-espace élastique avec une force localisée en surface (Lamb, 1904) ou une source enfouie (Garvin, 1956) ou encore des solutions semi-analytiques dans des milieux à couches homogènes (Bouchon, 1981; Coutant, 1989), il n'existe en revanche pas de solutions analytiques pour des milieux arbitraires. Des approximations permettant de modéliser certaines caractéristiques des ondes sismiques ont alors été développées. Dans le cadre de la tomographie des temps de première arrivée, l'approche asymptotique par tracé de rai (Červený *et al.*, 1977; Achenbach *et al.*, 1982; Chapman, 2004) a été formulée via une approximation haute fréquence de l'équation d'onde (l'équation Eikonal). Une évolution de la technique tomographique a été proposée par Dahlen *et al.* (2000) afin de corriger les effets liés au contenu fréquentiel dans le cadre de la tomographie par fréquence finie (Nolet, 2008). Dans le contexte de l'imagerie sismique pétrolière, la résolution de l'équation d'onde acoustique *one-way* a été largement utilisée (Claerbout, 1976; Holberg, 1988). Néanmoins, les méthodes précédentes restent des approximations et ne s'appliquent plus dès lors qu'il faut considérer l'ensemble des phénomènes propagatifs en milieux complexes. Dans cette optique, les géophysiciens ont développé un ensemble de méthodes numériques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) qui régissent la propagation des ondes et que l'on peut classer en 3 grandes familles : les différences finies, les méthodes pseudo-spectrales et les éléments finis. Dans la suite, nous passons en revue les caractéristiques et les limitations de ces méthodes.

1.1.1 Différences finies

L'approche qui a été la plus largement utilisée en géophysique et qui le reste encore de nos jours, est sans doute celle des différences finies (DF) qui ont vu leur essor dans ce domaine dès la fin des années 60 avec l'apparition des calculateurs (Alterman & Karal, 1968). Les DF reposent sur une formulation forte des EDP via un calcul du champ d'onde

sur un ensemble de points répartis généralement selon une grille cartésienne. De manière simple, on peut écrire une approximation de la dérivée d'une quantité u en un point, comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (1.1)$$

où h est le pas de la grille et l'indice i désigne le point où la dérivée selon x est calculée à partir du point voisin situé à gauche $i - 1$ et du point voisin de droite $i + 1$. L'expression (1.1) correspond à une dérivée centrée en espace du second ordre. Il existe de nombreux schémas numériques (appelés *stencils* dans la terminologie usitée en DF) et nous invitons le lecteur à se référer à Moczo *et al.* (2004) pour une introduction générale sur ces méthodes. L'approche DF a été initialement développée avec une grille conventionnelle où l'ensemble des champs et des propriétés du milieu sont discrétisés en chaque point. L'alternative de la grille décalée au second ordre (Yee, 1966; Madariaga, 1976; Virieux, 1984, 1986) et au quatrième ordre (Levander, 1988) consiste à calculer les champs de contrainte et de vitesse sur des grilles décalées de $h/2$. Les schémas avec grille décalée ont l'intérêt de présenter une dispersion numérique faible et quasi-indépendante de la valeur du coefficient de Poisson (Moczo *et al.*, 2010b). De plus, ils permettent d'éviter les problèmes d'instabilité numérique rencontrés avec la grille conventionnelle en présence d'une interface fluide/solide. On peut également citer le schéma dit tourné (Saenger & Bohlen, 2004b) qui combine des dérivées à partir de points situés suivant des diagonales de la grille minimisant les erreurs de dispersion et réduisant l'anisotropie numérique rencontrée avec des schémas classiques en croix. Enfin, les DF sont facilement généralisables à des ordres élevés (Dablain, 1986; Etgen & O'Brien, 2007).

Les DF ont été appliquées dans de nombreux contextes et à de multiples échelles. On peut mentionner les développements pour les milieux acoustiques (Alford *et al.*, 1974; Operto *et al.*, 2007), élastiques (Graves, 1996; Bohlen & Saenger, 2006), visco-élastiques (Day & Bradley, 2001; Saenger & Bohlen, 2004a), anisotropes (Igel *et al.*, 1995; Saenger & Bohlen, 2004a) et poro-élastiques (Wenzlau & Muller, 2009; Masson & Pride, 2010). Concernant les volets applicatifs 3D, les DF ont été employées pour l'étude des effets de site dans des bassins sédimentaires (Olsen, 2000; Wang *et al.*, 2001), pour l'inversion des formes d'ondes (Ben Hadj Ali *et al.*, 2008; Plessix, 2009; Sirgue *et al.*, 2010), pour l'imagerie par *reverse time migration* (RTM) (Etgen & O'Brien, 2007) et pour la modélisation de la rupture dynamique des séismes (Cruz-Atienza & Virieux, 2004; Day *et al.*, 2005), pour ne citer que quelques applications majeures.

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

Les limitations des DF sont intrinsèquement liées aux grilles utilisées. Avec une grille régulière, le pas d'espace est contraint par la vitesse minimale du milieu et dans le cas de milieux fortement hétérogènes, on peut aboutir à des grilles numériques de tailles conséquentes. Aussi, des schémas basés sur des grilles irrégulières (Pitarka, 1999) ou sur l'assemblage de grilles discontinues (Aoi & Fujiwara, 1999; Hayashi *et al.*, 2001; Moczo *et al.*, 2002; Kang & Baag, 2004) ont été développés pour palier en partie à ce problème de discrétisation. Un second inconvénient majeur des DF provient de leur limitation liée à la présence de topographie. Si les DF sont adaptées au cas d'une surface libre plane (Gottschamer & Olsen, 2001), il n'en va pas de même en cas de topographie complexe. En effet, la discrétisation d'une topographie par une grille cartésienne entraîne une représentation de la surface sous forme de marches d'escalier, sources d'artéfacts (Robertsson, 1996; Ohminato & Chouet, 1997; Hestholm, 1999; Hayashi *et al.*, 2001). Pour réduire ces artéfacts, des pas en espace considérablement petits doivent être adoptés pouvant conduire à des coûts numériques prohibitifs dans des modèles complexes (Bohlen & Saenger, 2006). Afin de restituer fidèlement la topographie, des formulations originales ont vu le jour, comme celle des interfaces immergées (Lombard *et al.*, 2008), ou bien font appel à des combinaisons de méthodes numériques comme nous verrons plus loin. Enfin, on peut également citer le problème de positionnement de la source et des récepteurs par rapport aux points de la grille qui nécessite une interpolation (Hicks, 2002) pour obtenir une solution précise. Néanmoins, la simplicité de la formulation DF et son aspect local, en font une méthode efficace et facilement parallélisable sur des architectures à mémoire distribuée (Minkoff, 2002).

1.1.2 Méthodes pseudo-spectrales

A l'instar des DF, les méthodes pseudo-spectrales (PS) reposent sur une formulation forte des EDP et une discrétisation par grille cartésienne régulière ou curviligne (Kosloff *et al.*, 1990; Fornberg, 1996; Faccioli *et al.*, 1997). Le calcul des dérivées spatiales se fait via une transformée de Fourier dans le domaine des nombres d'onde transformant les dérivées d'ordres élevés en simples produits mettant en oeuvre des opérations numériques peu coûteuses. Les méthodes PS permettent d'aboutir à des ordres élevés mais en contrepartie font intervenir des *stencils* étendus spatialement. Par conséquent, le caractère faiblement local de ces méthodes rend leur parallélisme peu efficace sur les plateformes de calcul parallèle en raison des communications importantes requises entre les sous-domaines. Comme pour le cas des DF, la topographie est difficilement prise en compte et

de plus, l'étendue spatiale du schéma numérique suppose une variation lisse des milieux. Si cette hypothèse est vérifiée, alors les méthodes PS restent des méthodes de choix en raison de la précision qu'elles procurent, tout en autorisant une discrétisation avantageuse (jusqu'à la limite théorique de 2 points par longueur d'onde).

1.1.3 Éléments finis

Dès lors qu'une topographie complexe doit être considérée, les méthodes DF et PS sont difficilement applicables. Les méthodes par éléments finis (EF) sont alors d'intéressantes alternatives. Basés sur une formulation faible des EDP et une discrétisation non régulière, les EF permettent de prendre en compte fidèlement des géométries complexes par l'usage d'un maillage adapté. Appliqués très tôt en mécanique du solide (Zienkiewicz & Taylor, 1967), les EF ont vu leur introduction tardive dans la communauté géophysique (Marfurt, 1984).

1.1.3.1 Un peu d'histoire

Il est intéressant de tracer au cours de l'histoire, les contributions majeures qui ont permis d'aboutir aux méthodes par éléments finis telles que nous les connaissons aujourd'hui. Une telle revue a été entreprise par Gander (2009). Les pierres angulaires des EF sont l'approche variationnelle introduite par Euler (1744) et Lagrange (1755) et les transformations conformes par Riemann en 1851. Mais c'est en 1909, que l'on peut dater la naissance des EF par le physicien suisse Walther Ritz (Ritz, 1909) qui résolut, via une combinaison linéaire de fonctions de base définies au sein d'un carré, un problème de l'époque : les figures de Chladni (figure 1.1). Les travaux de Ritz retiennent peu d'intérêt en Europe et c'est l'école russe qui saisit tout l'intérêt de l'approche et va s'approprier cette méthode. Timoshenko (1913), Bubnov (1913) puis Galerkin (Galerkin, 1915) vont rendre célèbre cette méthode par la publication d'études caractéristiques sur les plaques entrant dans la construction des coques de navires. Les avancées suivantes sont l'utilisation de fonctions de base polynômiales dans des triangles (Courant, 1943) et l'invention du terme 'élément fini' par Clough (1960).

1.1.3.2 Éléments finis standards

Les EF reposent sur une décomposition des champs d'onde sur des bases polynômiales définies au sein d'éléments aux géométries arbitraires. En contre-partie, le coût numé-

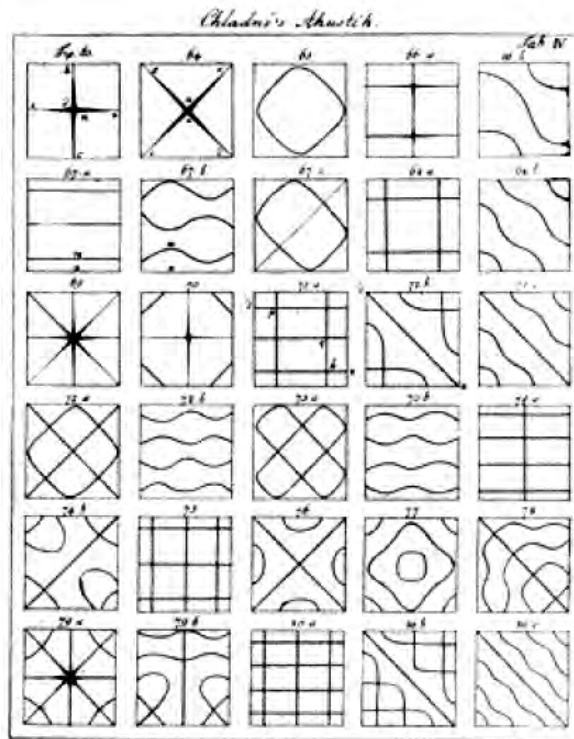


FIG. 1.1 – Les figures de Chladni (1787) sont des motifs que l’on observe sur une plaque recouverte de sable sollicitée par les vibrations d’un archet. Le sable s’accumule le long des lignes nodales des modes propres de la plaque excités selon l’emplacement de l’archet. C’est dans le but de calculer ces motifs, que Ritz a inventé le principe de la méthode par éléments finis en 1909, d’après Gander (2009).

rique des méthodes EF est généralement important en raison de la taille conséquente du système linéaire à résoudre. Dans le but de réduire ce coût, des approches ont conduit à la technique de condensation de masse (Chin-Joe-Kong *et al.*, 1999) ou encore aux éléments spectraux (ES).

1.1.3.3 Éléments spectraux

Les ES ont été initialement développés en mécanique des fluides (Patera, 1984) et introduits aux début des années 90 en géophysique par Seriani & Priolo (1994). Les ES utilisent des bases polynômiales de Chebyshev (Priolo *et al.*, 1994) ou encore de Legendre (Komatitsch & Vilotte, 1998). La combinaison des polynômes de Legendre et des points de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) permet d’obtenir une matrice de masse purement diagonale, aboutissant à une méthode totalement explicite.

En outre, l'un des intérêts majeurs des ES est la convergence spectrale (en terme de précision) procurée par les bases polynômiales considérées. En revanche, l'efficacité des ES est subordonnée à l'usage de maillages quadrangles (2D) ou hexaédriques (3D) où sont définis les points de GLL. De tels maillages présentent certaines contraintes en matière de flexibilité géométrique qui rendent difficile la création de maillages adaptatifs. L'extension des méthodes ES aux maillages triangulaires (2D) ou tétraédriques (3D) requiert la définition de points de quadrature optimaux dans les n -simplexes qui reste aujourd'hui un sujet de recherche actif (Pasquetti & Rapetti, 2006; Mercerat *et al.*, 2006). Afin de relâcher la contrainte relative aux maillages hexaédriques conformes, la possibilité d'utiliser des maillages non conformes via la technique *mortar* est également étudiée (Casadei *et al.*, 2002). Cette technique permet de considérer des maillages non conformes entre plusieurs domaines et met en oeuvre une condition de raccord entre ses domaines afin d'assurer la continuité de la solution.

Les EF que nous qualifierons de standards et les ES ont été largement appliqués dans des contextes multiples : modélisations des mouvements du sol induits par les séismes (Aagaard *et al.*, 2001; Komatitsch *et al.*, 2004; Ichimura *et al.*, 2007; Chaljub *et al.*, 2010), inversion des caractéristiques des séismes (Akcelik *et al.*, 2003), tomographie globale (Capdeville *et al.*, 2005), inversion des formes d'ondes à l'échelle continentale (Fichtner *et al.*, 2008; Tape *et al.*, 2010), propagation en milieux poreux (Morency & Tromp, 2008) ou rupture dynamique des séismes (Vilotte *et al.*, 2005).

Les méthodes EF standards et ES appartiennent à la famille des méthodes EF que l'on peut qualifier de continues car elles supposent une continuité du champ d'onde en tout point du milieu. Par conséquent, ces méthodes ne sont plus valables lorsqu'une discontinuité apparaît dans la solution, comme dans le cas d'une interface fluide-solide par exemple. Dans ce cas, les équations acoustiques et élastiques sont utilisées de part et d'autre de l'interface et une condition explicite à l'interface doit être appliquée (Komatitsch *et al.*, 2000; Chaljub *et al.*, 2003).

1.1.3.4 Éléments finis discontinus

Une formulation EF discontinue a vu le jour au début des années 70 (Reed & Hill, 1973), appelée méthode EF par approximation Galerkin discontinue (GD), et a depuis été appliquée dans de nombreux domaines : électro-magnétique (Cockburn *et al.*, 2004; Dolean *et al.*, 2007), aéro-acoustique (Bernacki & Piperno, 2003; Touloupoulos & Ekaterinaris, 2006) ou encore physique des plasmas (Jacobs & Hesthaven, 2006), pour ne citer

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

que quelques exemples. Un panorama sur les applications diverses de cette méthode est donné dans Cockburn *et al.* (2000). Récemment, les avantages de cette méthode ont été explorés dans le cadre de la propagation d'ondes sismiques (Ainsworth *et al.*, 2006; Basabe *et al.*, 2008; de la Puente *et al.*, 2008; Delcourte *et al.*, 2009; Dumbser & Käser, 2006; Käser & Dumbser, 2006; Käser *et al.*, 2007, 2008b; de la Puente *et al.*, 2007). Schématiquement, les méthodes GD sont des méthodes EF où les champs sont potentiellement discontinus entre les éléments. Pour cela, les conditions de continuité entre les éléments sont remplacées par des échanges de flux. Ainsi, le cas d'un contact fluide-solide peut être traité sans avoir recours à des conditions particulières à l'interface grâce à l'usage d'un flux approprié (Käser & Dumbser, 2008). Par conséquent, la formulation GD est particulièrement adéquate pour l'étude des phénomènes discontinus comme le développement d'ondes de chocs ou celui des fractures (de la Puente *et al.*, 2009). Outre, la prise en charge de phénomènes physiques discontinus, les méthodes GD permettent de choisir arbitrairement l'ordre d'interpolation dans les éléments aboutissant à une complète adaptivité en espace (h -adaptivité) et en ordre (p -adaptivité) (Dumbser *et al.*, 2007b; Etienne *et al.*, 2010a).

Il est à noter que la méthode GD développée à l'ordre le plus faible, équivaut à celle des volumes finis (VF) à l'ordre le plus faible (Dormy & Tarantola, 1995; LeVeque, 2002; Nordström *et al.*, 2003; Brossier *et al.*, 2007), méthode couramment employée en mécanique des fluides et qui a été récemment appliquée à la problématique de rupture des séismes (BenJemaa *et al.*, 2007, 2009). Il existe également des méthodes VF d'ordres élevés (Dumbser *et al.*, 2007a).

1.1.4 Autres méthodes et méthodes hybrides

Comme nous l'avons vu précédemment, chaque méthode possède ses avantages et ses inconvénients. Il paraît donc judicieux d'appliquer telle méthode selon telle problématique ou encore d'utiliser plusieurs méthodes afin de subdiviser le milieu étudié en sous-domaines où chaque méthode est la plus appropriée. Dans ce cas, on aboutit à une méthode hybride comme l'approche développée par Galis *et al.* (2008) qui fait un couplage entre les méthodes DF et EF pour traiter efficacement des problèmes de modélisation en présence de topographie. L'idée est d'utiliser la formulation DF dans l'ensemble du modèle sauf dans la zone proche de la surface qui est discrétisée par EF. Les deux schémas DF et EF sont alors interfacés via une zone tampon. Si de telles approches sont séduisantes, les conditions de raccord sont en général complexes à mettre en oeuvre. Par

conséquent, les méthodes hybrides sont en général des réponses à des problématiques spécifiques mais ne permettent pas de traiter des problèmes arbitraires de manière routinière. On peut également citer le couplage ES et modes normaux (Capdeville *et al.*, 2003) pour l'étude de la structure interne de la Terre et le couplage PS et DF pour des applications de RTM à 3 dimensions (Chu & Stoffa, 2008).

Enfin, dans un autre contexte, on peut citer la formulation dite par éléments distincts ou éléments discrets (ED) qui repose sur la notion de blocs qui ont la propriété de pouvoir se mouvoir les uns par rapport aux autres, via des lois de comportement définies le long des interfaces entre les blocs. Cette formulation est couramment employée par les géomécaniciens pour la modélisation des glissements de terrain. Les ED combinés à une méthode EF (Munjiza, 2004), permettent d'aboutir à des modèles où les blocs peuvent se déformer et se déplacer, représentant assez bien les phénomènes rencontrés dans les glissements de terrain (Eberhardt *et al.*, 2004). Bien que destinés en particulier à la résolution de problèmes mécaniques, les ED ont été également appliqués à la modélisation d'ondes sismiques (Mariotti, 2007). Il est à noter qu'en géomécanique, le maillage est de type Lagrangien (ou dynamique) car il subit des déformations au fur et à mesure que la forme des objets étudiés évolue. En modélisation sismique, les déplacements étant infinitésimaux par rapport à la taille des mailles, les méthodes utilisent habituellement des maillages de type Eulérien (ou statique).

1.2 Équations de propagation

1.2.1 Système élasto-dynamique

Nous n'entrerons pas en détail dans le développement des équations qui régissent la propagation des ondes que l'on peut trouver dans de nombreux traités de Physique (Duvaut, 1990; Royer & Dieulesaint, 1997) et de géophysique (Menke & Abbott, 1990; Shearer, 2009). Dans l'hypothèse des petits déplacements (limite de validité de la théorie de l'élasticité linéaire), l'équation d'onde dans les milieux élastiques s'obtient par une combinaison de la loi de l'élasticité de Hooke et de la loi du mouvement de Newton. Le système d'EDP résultant, appelé système élasto-dynamique, s'écrit au premier ordre :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \mathbf{v} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext} \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \nabla \mathbf{v},\end{aligned}\tag{1.2}$$

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

avec la définition des vecteurs vitesse et contrainte :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_x \ v_y \ v_z)^T \\ \sigma &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz})^T.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Dans l'équation (1.2), \mathbf{f}_{ext} représente l'ensemble des forces externes, ρ est la densité du milieu et \mathbf{c} le tenseur élastique qui contient au plus 21 coefficients indépendants dans le cas des milieux anisotropes tricliniques. Pour les milieux isotropes auxquels nous nous intéresserons exclusivement dans ce travail, le tenseur élastique se réduit aux deux constantes de Lamé λ and μ , et le système élasto-dynamique s'écrit de manière développée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \lambda(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \lambda(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mu(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mu(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mu(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right\},\end{aligned}\tag{1.4}$$

où \mathbf{x} désigne la coordonnée d'un point dans l'espace et t le temps. Pour alléger les notations, nous avons volontairement omis les forces externes \mathbf{f}_{ext} . Ce système peut s'exprimer sous forme matricielle :

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{A} \partial_x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B} \partial_y \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{C} \partial_z \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),\tag{1.5}$$

avec le vecteur \mathbf{u} défini par :

$$\mathbf{u} = (v_x \ v_y \ v_z \ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz})^T.\tag{1.6}$$

Les matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont les matrices Jacobiennes du système élasto-dynamique dont la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres permet de connaître la nature des ondes qui peuvent se propager. On montre ainsi que seulement 2 types d'onde sont susceptibles d'exister : les ondes longitudinales dont la polarisation est dans la direction de propagation (ondes compressives) et les ondes transverses dont la polarisation est perpendiculaire à la direction de propagation (ondes cisailantes). Les ondes longitudinales étant plus rapides que les ondes transverses, on a coutume en sismologie de les appeler respectivement ondes P (première) et S (seconde). Les vitesses de propagation de ces ondes sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} V_P &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ V_S &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En présence d'une surface libre, les ondes P et S peuvent interagir pour créer des ondes de surface. On en distingue deux types : les ondes de Love (Love, 1911) et les ondes de Rayleigh (Rayleigh, 1887). Les ondes de Love ont une polarisation parallèle à la surface et perpendiculaire à la direction de propagation (composante transverse) alors que les ondes de Rayleigh ont une polarisation elliptique rétrograde dans le plan sagittal (résultant d'une combinaison de composantes longitudinales et transverses décalées de $\pi/2$). La figure 1.2 illustre les différents types d'onde rencontrés dans les milieux élastiques. La vitesse des ondes de Rayleigh a une expression complexe dont une valeur approchée est (Viktorov, 1967) :

$$V_R = \frac{0.718 V_P^2 - V_S^2}{0.750 V_P^2 - V_S^2} V_S. \quad (1.8)$$

On constate d'après (1.8), que la vitesse des ondes de Rayleigh est légèrement inférieure à celle des ondes S. La particularité de ces ondes de surface est que leur amplitude est quasiment nulle pour une profondeur supérieure à la longueur d'onde. Par conséquent, les ondes de Rayleigh sont des ondes dispersives (la vitesse est dépendante de la fréquence). Une étude des caractéristiques des ondes de Rayleigh, permet d'accéder aux propriétés superficielles du milieu. Cet aspect est exploité en géophysique à des fins d'imagerie de la proche surface avec la technique SASW (*Spectral analysis of surface waves*) (Nazarian

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMQUES

& Stokoe, 1984; Grandjean *et al.*, 2000)¹.

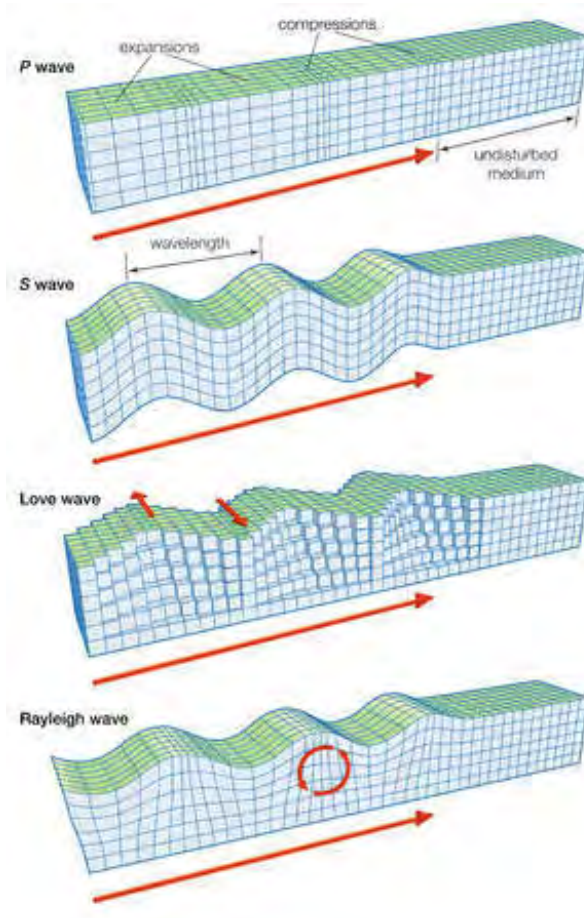


FIG. 1.2 – Les différents types d’ondes rencontrés dans les milieux élastiques. Les ondes de volume comprennent les ondes P et S et les ondes de surface comprennent les ondes de Love et de Rayleigh.

Dans cette étude, nous utiliserons une autre forme matricielle du système (1.5) où les composantes de vitesse et de contrainte sont dissociées pour permettre la discrétisation temporelle à l’aide d’un schéma d’intégration de type saute-mouton et qui s’écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{A}_\theta \sigma) \\ \partial_t \sigma &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{B}_\theta \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

¹Les ondes de Rayleigh sont également exploitées dans le domaine du contrôle non destructif des matériaux par microscopie acoustique (Briggs, 1992; Etienne, 1997).

avec les matrices :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_x &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{B}_x &= \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}^T \\
 \mathcal{A}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} & \mathcal{B}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}^T \\
 \mathcal{A}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{B}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

1.2.2 Système acoustique

Dans les fluides, $\mu = 0$ et le système (1.4) devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} \\
 \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right\} \\
 \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\
 \frac{\partial \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = \lambda(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\} \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

On introduit alors la pression P :

$$P(\mathbf{x}, t) = \frac{\sigma_{xx}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t) + \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t)}{3}, \quad (1.12)$$

qui permet d'écrire le système acoustique en vitesse-pression du premier ordre :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \right\} \\
 \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right\} \\
 \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \left\{ \frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\}
 \end{aligned}$$

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \kappa(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial v_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \right\}, \quad (1.13)$$

où l'on définit le module d'incompressibilité κ (dans le cas acoustique, nous avons la relation $\kappa(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$). Dans les milieux acoustiques, seules les ondes P sont susceptibles de se propager.

1.2.3 Forme pseudo-conservative

En adoptant le changement de variable proposé par BenJemaa (2007) :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_x \ v_y \ v_z)^T \\ \sigma &= (\tau \ \tau' \ \tau'' \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz})^T, \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \tau' &= \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\ \tau'' &= \frac{1}{3}(-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

le système (1.9) devient :

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \mathbf{v} &= \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \partial_\theta (\mathcal{M}_\theta \sigma) \\ \Lambda \partial_t \sigma &= \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \partial_\theta (\mathcal{N}_\theta \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

On définit les matrices :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ \mathcal{M}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (1.17)$$

et

$$\Lambda = \text{diag}\left(\frac{3}{3\lambda + 2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right). \quad (1.18)$$

Le système (1.16) est exprimé sous une forme dite pseudo-conservative. La particularité de cette forme provient du fait que les propriétés physiques se trouvent du côté des dérivées temporelles contrairement à la formulation standard où elles sont situées du côté des dérivées spatiales, eq. (1.9). La forme pseudo-conservative offre d'intéressantes propriétés comme nous le verrons par la suite.

1.2.4 Cas 1D

Nous dérivons du système (1.5), l'équation d'onde pour le cas 1D :

$$\partial_t \mathbf{u}(x, t) = \mathcal{A} \partial_x \mathbf{u}(x, t), \quad (1.19)$$

où le vecteur \mathbf{u} est réduit à 2 composantes :

$$\mathbf{u} = (v \ \sigma)^T, \quad (1.20)$$

et la matrice Jacobienne \mathcal{A} est donnée par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \lambda + 2\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

L'équation (1.19) régit le déplacement d'ondes planes suivant l'axe x , dans un milieu invariant en y et z . Pour alléger les notations, les composantes de vitesse et de contrainte sont simplement nommées v et σ respectivement, les indices étant superflus dans le cas 1D. La décomposition de \mathcal{A} en valeurs propres (α_i) et vecteurs propres (\mathbf{R}_i) s'obtient par la résolution du système :

$$\mathcal{A} \mathbf{R}_i = \alpha_i \mathbf{R}_i, \quad (1.22)$$

qui aboutit à :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} V_P & 0 \\ 0 & -V_P \end{pmatrix} \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} V_P & -V_P \\ \lambda + 2\mu & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

avec \mathcal{L} la forme canonique de \mathcal{A} qui contient sur la diagonale les valeurs propres de \mathcal{A} et \mathcal{R} la matrice modale dont les colonnes sont les vecteurs propres de \mathcal{A} . D'après (1.23), nous constatons que la solution de l'équation (1.19) comporte deux ondes qui se propagent dans des directions opposées à la vitesse V_P .

1.3 Méthodes par éléments finis

Dans ce chapitre, nous présentons une introduction sur les méthodes par éléments finis. Nous nous appuyons sur l'équation d'onde 1D qui, outre sa simplicité, permet d'aborder tous les concepts relatifs à ces méthodes. Le lecteur pourra ainsi se familiariser avant d'aborder l'extension à 3 dimensions qui fera l'objet du chapitre 2. Afin d'approfondir ces concepts, on se référera aux ouvrages de référence sur les EF (Batoz & Dhett, 1990; Hughes, 2003; Zienkiewicz *et al.*, 2005; Dhett *et al.*, 2004).

1.3.1 Principes de base

1.3.1.1 Notion d'élément

Les méthodes EF reposent sur la recherche d'une solution du problème par 'morceaux' par le biais de volumes discrets de l'espace appelés éléments. Ces éléments sont habituellement jointifs et sans recoupement. Dans le cas 1D, les éléments sont des segments et nous avons :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \quad (1.24)$$

où Ω représente le milieu considéré et Ω_i l'élément discret d'indice i . N désigne le nombre d'éléments. La figure 1.3 représente la discrétisation d'un milieu unidimensionnel. Les éléments sont bornés à gauche par la coordonnée x_i^g et à droite par x_i^d . Les éléments

étant contigus, nous avons les relations $x_i^g = x_{i-1}^d$ et $x_i^d = x_{i+1}^g$ ou encore :

$$L = \sum_{i=1}^N L_i, \quad (1.25)$$

où L désigne la taille du milieu et L_i la taille de chaque élément. Dans la terminologie EF, l'ensemble des éléments constitue un maillage. La solution du système (1.19) est

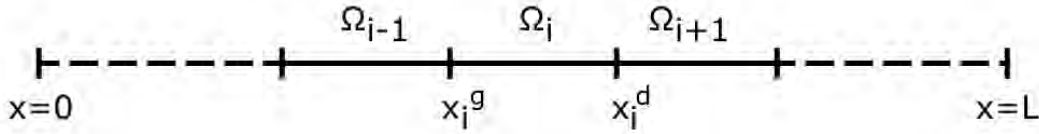


FIG. 1.3 – Discrétisation d'une ligne 1D à l'aide d'éléments.

alors approximée par :

$$\mathbf{u}(x, t) = \bigcup_{i=1}^N \hat{\mathbf{u}}_i(x, t), \quad (1.26)$$

où $\hat{\mathbf{u}}_i$ est l'approximation de \mathbf{u} dans l'élément i .

1.3.1.2 h -adaptivité

Il est à noter que les éléments peuvent être de tailles différentes. L'un des intérêts majeurs des EF est de pouvoir utiliser des maillages non réguliers en adaptant par exemple la taille des éléments selon les propriétés locales du milieu ; on parle alors de h -adaptivité (h désignant la discrétisation spatiale).

1.3.1.3 Approximation via des fonctions de base

Le principe fondamental des EF est de rechercher la solution sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base. A l'intérieur de chaque élément, on peut décomposer $\hat{\mathbf{u}}_i$ de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{u}}_i(x, t) = \sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{u}_{ij}(x_j, t) \varphi_{ij}(x), \quad (1.27)$$

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

où d_i est le nombre de noeuds ou de degrés de liberté de l'élément Ω_i . L'expression (1.27) fait intervenir des bases que l'on qualifie de nodales. A chaque noeud j est associée une fonction de base φ_{ij} invariante dans le temps. Les coefficients \mathbf{u}_{ij} sont les degrés de liberté et correspondent aux valeurs de \mathbf{u} aux positions des noeuds x_j de l'élément. Il existe un autre type de base, dit modal, qui repose également sur une décomposition du champ d'onde via des fonctions de base, mais ces dernières ne sont pas associées à des noeuds. Dans ce cas, nous avons :

$$\hat{\mathbf{u}}_i(x, t) = \sum_{j=1}^{d_i} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}(t) \Phi_{ij}(x). \quad (1.28)$$

Une conséquence importante : l'absence de valeurs nodales dans le cas des bases modales ne permet pas d'assurer facilement la continuité du champ d'onde entre les éléments dans les formulations continues comme nous le verrons plus tard. Le passage entre les coefficients des modes $\tilde{\mathbf{u}}_{ij}$ et les valeurs nodales \mathbf{u}_{ij} se fait via la matrice de Vandermonde \mathcal{V} définie comme suit :

$$\mathcal{V}_i = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_{d_i}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_{d_i}) & \dots & \Phi_{d_i}(x_{d_i}) \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

et nous avons la relation :

$$\mathbf{u}_i = \mathcal{V}_i \tilde{\mathbf{u}}_i, \quad (1.30)$$

avec la définition des vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= (v_{i1} \dots v_{id_i} \sigma_{i1} \dots \sigma_{id_i})^T \\ \tilde{\mathbf{u}}_i &= (\tilde{v}_{i1} \dots \tilde{v}_{id_i} \tilde{\sigma}_{i1} \dots \tilde{\sigma}_{id_i})^T. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés uniquement aux bases nodales. Généralement, on adopte des fonctions de base de forme polynômiale. Dans la suite, nous développons l'approche EF avec des fonctions de base Lagrangiennes et des noeuds équidistants (Annexe A.2). On définit un élément P_k , un élément où des polynômes de degré k sont utilisés. Dans le cas 1D, le nombre de noeuds d'un élément P_k est égal à $d = k + 1$. On peut définir un élément de référence (Annexe A.1) où l'expression de ces fonctions de base s'écrit de manière simple. Pour le cas 1D, l'élément de référence est le segment

$[-1, 1]$. Dans la figure 1.4, nous avons représenté les 3 types d'approximation abordés dans ce mémoire. Au sein d'un élément P_0 , la vitesse et la contrainte sont approximées

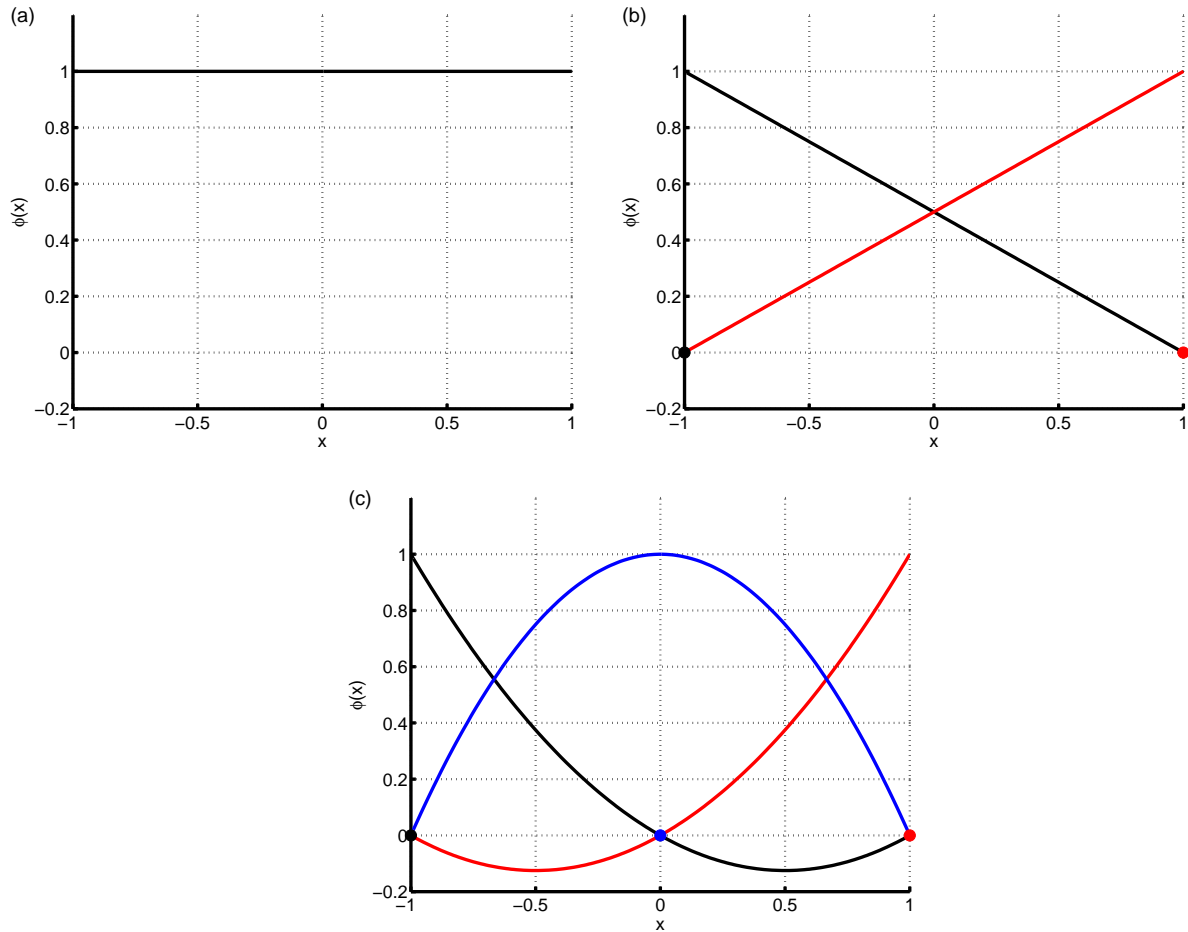


FIG. 1.4 – (a) Fonction de base Lagrangienne pour l'élément de référence P_0 à un seul degré de liberté. (b) Idem pour l'élément de référence P_1 à 2 degrés de liberté. La fonction de base et le noeud qu'il lui est associé sont de la même couleur. (c) Idem pour l'élément de référence P_2 à 3 degrés de liberté.

de manière constante. L'approximation est linéaire pour P_1 et quadratique pour P_2 . On note que chaque fonction de base vaut 1 au noeud qu'il lui est associé et est nulle à tous les autres noeuds.

1.3.1.4 Formulation faible

L'équation (1.19) est la formulation forte du système élasto-dynamique. Les méthodes DF ou PS reposent sur cette formulation en recherchant une solution qui vérifie exactement l'équation (1.19) en chaque point de la grille utilisée. Les méthodes EF reposent quant à elles sur une formulation dite faible du problème à résoudre où l'on cherche à vérifier l'équation (1.19) en moyenne sur l'élément. Cette forme s'obtient en multipliant le système (1.19) par une fonction test φ_{ir} et en intégrant l'ensemble sur l'élément Ω_i :

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{ir}(x) \partial_t \mathbf{u}(x, t) dx = \int_{\Omega_i} \varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \partial_x \mathbf{u}(x, t) dx. \quad (1.32)$$

Si la fonction test fait partie de la base utilisée pour l'approximation des champs, nous parlons alors de méthode Galerkin standard. Les éléments Ω_i étant des segments, on peut expliciter les intégrales de la manière suivante :

$$\int_{x_i^g}^{x_i^d} \varphi_{ir}(x) \partial_t \mathbf{u}(x, t) dx = \int_{x_i^g}^{x_i^d} \varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \partial_x \mathbf{u}(x, t) dx. \quad (1.33)$$

Une intégration par partie du système (1.33) aboutit à l'expression :

$$\int_{x_i^g}^{x_i^d} \varphi_{ir}(x) \partial_t \mathbf{u}(x, t) dx = \left[\varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \mathbf{u}(x, t) \right]_{x_i^g}^{x_i^d} - \int_{x_i^g}^{x_i^d} \partial_x \varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \mathbf{u}(x, t) dx. \quad (1.34)$$

Le premier terme dans la partie droite de (1.34) correspond à l'expression d'un flux. En effet, dans le cas d'éléments volumiques à 3 dimensions, nous avons la formule d'intégration par partie :

$$\int_{\Omega_i} \varphi(\mathbf{x}) \partial_x u(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \varphi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) dS - \int_{\Omega_i} \partial_x \varphi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.35)$$

où Γ_i désigne la surface de Ω_i et \mathbf{n} le vecteur normal sortant à Γ_i . Par analogie, bien que dans le cas 1D, ce flux paraisse artificiel, nous pouvons l'introduire en écrivant :

$$F_{\Gamma_i}(\mathbf{u}) = \left[\varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \mathbf{u}(x, t) \right]_{x_i^g}^{x_i^d} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \varphi_{ir}(x) \mathcal{A} \mathbf{u}(x, t), \quad (1.36)$$

où \mathbf{n} est un scalaire qui vaut :

$$\mathbf{n} = 1 \quad \text{si } x = x_i^d$$

$$\text{et } \mathbf{n} = -1 \quad \text{si } x = x_i^g \quad (1.37)$$

L'un des intérêts de la formulation faible est d'introduire la notion de flux qui permet entre autre de traiter de manière simple les conditions aux limites (comme la surface libre) ou bien les conditions sur des interfaces particulières (comme le cas d'une faille). Dès lors, selon l'option adoptée pour l'estimation des flux, nous aboutissons aux formulations continue et discontinue des EF.

1.3.2 Formulation discontinue

Nous nous intéressons dans ce travail à la formulation discontinue de la méthode EF, que nous appellerons dans la méthode par approximation Galerkin discontinue (GD). Pour une introduction détaillée, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de Hesthaven & Warburton (2008) qui constitue une bonne référence sur l'approche GD. Dans les méthodes GD, il n'y a pas de continuité des fonctions de base entre les éléments. Les éléments ne partagent donc pas leurs noeuds comme cela est représenté dans la figure 1.5.b pour le cas d'éléments de type P_1 à deux degrés de liberté. Par opposition, la formulation EF continue implique un partage des noeuds entre les éléments contigus (figure 1.5.a). En réalité, même dans la formulation continue, les noeuds sont également disjointes entre les éléments, mais les contributions de ces derniers sont sommées de manière à ne retenir qu'une seule valeur nodale (dans les méthodes EF continues, cette opération s'appelle l'assemblage). Dans les méthodes GD, la solution peut donc être discontinue entre chaque élément ce qui confère à la méthode d'intéressantes caractéristiques. Les quantités échangées entre les éléments sont des flux (symbolisés par les flèches bleues dans la figure 1.5.b) qui peuvent être estimés selon plusieurs procédés.

En utilisant (1.36) et en substituant (1.27) dans (1.34), nous obtenons :

$$\int_{\Omega_i} \varphi_{ir} \partial_t \left(\sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{u}_{ij} \varphi_{ij} \right) dx = F_{\Gamma_i}(\mathbf{u}) - \int_{\Omega_i} \partial_x \varphi_{ir} \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{u}_{ij} \varphi_{ij} \right) dx. \quad (1.38)$$

Le système (1.38) est vérifié pour toutes les fonctions tests de la base utilisée. Si nous considérons l'ensemble des fonctions tests admissibles, nous pouvons écrire à l'aide du produit tensoriel \otimes , ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{K}_i \partial_t \mathbf{u}_i = F_{\Gamma_i}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i, \quad (1.39)$$

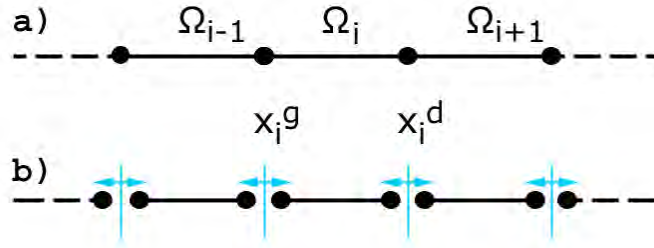


FIG. 1.5 – (a) Discrétisation par éléments continus P_1 à 2 degrés de liberté. Les noeuds frontières sont partagés entre les éléments. (b) Discrétisation par éléments discontinus P_1 . Chaque élément possède son ensemble de noeuds.

où le vecteur \mathbf{u}_i a été défini en (1.31). Pour obtenir l'expression (1.39), nous avons émis l'hypothèse que les propriétés physiques étaient constantes par élément (afin de sortir \mathcal{A}_i de l'intégrale). Bien que cela ne soit pas une condition *sine qua none*, c'est l'hypothèse que nous avons faite dans le développement de notre approche GD. La matrice \mathcal{K}_i est appelée matrice de masse et son expression est :

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{\Omega_i} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i], \quad (1.40)$$

\mathcal{E}_i est la matrice de raideur, qui s'écrit :

$$(\mathcal{E}_i)_{rj} = \int_{\Omega_i} (\partial_x \varphi_{ir}) \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i]. \quad (1.41)$$

Un avantage de la formulation discontinue, par opposition à la formulation continue, est de mettre en oeuvre des matrices locales et de faible dimension. En effet, les matrices \mathcal{K}_i et \mathcal{E}_i sont de taille $(d_i \times d_i)$ et dans l'hypothèse de propriétés physiques constantes par élément, ces matrices sont uniques pour tous les éléments (à une normalisation près). Dans le cas de propriétés variables dans les éléments, les matrices doivent être calculées pour chaque élément. Le calcul de \mathcal{K}_i et \mathcal{E}_i se fait via une règle de quadrature explicitée dans l'annexe A.3. De plus, le calcul des composantes de \mathbf{u}_i requiert l'inverse de \mathcal{K}_i qui peut également se calculer facilement.

1.3.2.1 Flux centrés

Il existe différentes possibilités pour calculer le terme de flux $F_{\Gamma_i}(\mathbf{u})$ dans l'équation (1.39). La première que nous abordons, repose sur l'estimation du flux de manière centrée en espace. Cette approche a été initialement introduite pour les équations de Maxwell par Remaki (2000) qui a montré que ce schéma était non dissipatif et stable à condition d'adopter un schéma de type saute-mouton (cf. chapitre 1.3.4) pour l'intégration temporelle. Le flux de \mathbf{u} à travers Γ_i se décompose en chaque bord de l'élément de la manière suivante :

$$F_{\Gamma_i}(\mathbf{u}) = \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} F_{\Gamma_i^k}(\mathbf{u}), \quad (1.42)$$

où k représente l'élément voisin de i à gauche ($k = i - 1$) ou à droite ($k = i + 1$). L'expression (1.42) requiert la connaissance de \mathbf{u} aux bords de l'élément Γ_i^k , quantité que nous noterons $\mathbf{u}_{\Gamma_i^k}$. Dans l'hypothèse des flux centrés, cette quantité est approximée par les moyennes des variables entre les éléments adjacents comme suit :

$$\mathbf{u}_{\Gamma_i^k} = \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_k}{2} \quad \forall k \in \{i - 1, i + 1\}. \quad (1.43)$$

Le flux de \mathbf{u} à travers Γ_i^k peut alors s'écrire :

$$F_{\Gamma_i^k}(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_i^k} n_{ik} \varphi_{ir} \mathcal{A}_i \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_k}{2} \quad \forall k \in \{i - 1, i + 1\}, \quad (1.44)$$

avec :

$$\begin{aligned} n_{ik} &= 1 & \text{si } k = i + 1 \\ \text{et } n_{ik} &= -1 & \text{si } k = i - 1. \end{aligned} \quad (1.45)$$

En utilisant l'expression (1.42), le système (1.39) s'écrit :

$$\mathcal{K}_i \partial_t \mathbf{u}_i = \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} F_{\Gamma_i^k}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i, \quad (1.46)$$

qui devient en utilisant (1.44) :

$$\mathcal{K}_i \partial_t \mathbf{u}_i = \frac{1}{2} \mathcal{A}_i \otimes \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} \mathbf{u}_i + \mathcal{G}_{ik} \mathbf{u}_k] - \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i. \quad (1.47)$$

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

Les matrices \mathcal{F}_{ik} et \mathcal{G}_{ik} sont les matrices de flux définies par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{ik})_{rj} &= \int_{\Gamma_i^k} \varphi_{ir} \varphi_{ij} & j, r \in [1, d_i] \\ (\mathcal{G}_{ik})_{rj} &= \int_{\Gamma_i^k} \varphi_{ir} \varphi_{ij} & r \in [1, d_i] \quad j \in [1, d_k]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

L'expression de ces matrices est donnée dans l'annexe A.3. D'un point de vue algorithmique, le calcul des composantes de \mathbf{u}_i se fait en parcourant l'ensemble des éléments et en appliquant l'équation :

$$\partial_t \mathbf{u}_i = \mathcal{K}_i^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathcal{A}_i \otimes \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} \mathbf{u}_i + \mathcal{G}_{ik} \mathbf{u}_k] - \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i \right), \quad (1.49)$$

qui n'est autre que le système (1.47) multiplié par l'inverse de la matrice de masse. La matrice de masse étant locale à l'élément, il est aisé de calculer son inverse afin d'obtenir un schéma totalement explicite. Une astuce consiste à renuméroter les noeuds de l'élément k voisin de i de manière symétrique aux bords Γ_i^k . Dans ce cas, et si les éléments i et k utilisent le même nombre de noeuds, alors $\mathcal{F}_{ik} = \mathcal{G}_{ik}$, ce qui permet de factoriser les produits matriciels pour le calcul des flux dans (1.49).

1.3.2.2 Flux décentrés

Le flux centré introduit plus haut est une approximation qui n'a pas de justification physique. Un autre flux, couramment utilisé dans les méthodes VF (LeVeque, 2002) est le flux de type Godunov (ou flux *upwind*). Il s'agit d'un flux qui repose sur une décomposition en valeurs et vecteurs propres du système à résoudre et qui permet de séparer les flux sortant et entrant dans un élément. Contrairement au flux centré, le flux *upwind* engendre un schéma dissipatif. Pour expliciter ce flux, il est utile d'introduire la matrice $|\mathcal{A}|$ définie par :

$$|\mathcal{A}| = \mathcal{R} |\mathcal{L}| \mathcal{R}^{-1}, \quad (1.50)$$

où les matrices \mathcal{R} et \mathcal{L} ont été définies dans (1.23). Nous obtenons :

$$|\mathcal{A}| = \begin{pmatrix} V_P & 0 \\ 0 & V_P \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Nous introduisons les matrices :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^+ &= \frac{1}{2}(\mathcal{A} + |\mathcal{A}|) \\ \mathcal{A}^- &= \frac{1}{2}(\mathcal{A} - |\mathcal{A}|),\end{aligned}\tag{1.52}$$

dont les valeurs sont les suivantes :

$$\mathcal{A}^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_P & \frac{1}{\rho} \\ \lambda + 2\mu & V_P \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -V_P & \frac{1}{\rho} \\ \lambda + 2\mu & -V_P \end{pmatrix}.\tag{1.53}$$

Ces matrices ont des propriétés remarquables : \mathcal{A}^+ autorise uniquement les ondes à se propager dans le sens positif de l'axe x et \mathcal{A}^- autorise uniquement les ondes à se propager dans le sens négatif. A l'aide de ces matrices, nous pouvons écrire le flux de type Godunov à chaque bord comme suit :

$$\begin{aligned}F_{\Gamma_i^k}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_i^k} n_{ik} \varphi_{ir} (\mathcal{A}_i^+ \mathbf{u}_k + \mathcal{A}_i^- \mathbf{u}_i) \quad \text{si } k = i - 1 \\ F_{\Gamma_i^k}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_i^k} n_{ik} \varphi_{ir} (\mathcal{A}_i^- \mathbf{u}_k + \mathcal{A}_i^+ \mathbf{u}_i) \quad \text{si } k = i + 1\end{aligned}\tag{1.54}$$

Remarque : si l'on retire la contribution de $|\mathcal{A}|$ dans l'expression (1.52) alors :

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^- = \frac{1}{2}\mathcal{A},\tag{1.55}$$

et dans ce cas, l'expression (1.54) devient celle du flux centré (1.44). En utilisant (1.54), le système (1.46) devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i \partial_t \mathbf{u}_i &= [(\mathcal{A}_i^+ \otimes \mathcal{F}_{id} - \mathcal{A}_i^- \otimes \mathcal{F}_{ig})\mathbf{u}_i + \mathcal{A}_i^- \otimes \mathcal{G}_{id} \mathbf{u}_{i+1} - \mathcal{A}_i^+ \otimes \mathcal{G}_{ig} \mathbf{u}_{i-1}] \\ &\quad - \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{E}_i \mathbf{u}_i,\end{aligned}\tag{1.56}$$

avec les définitions :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{id} = \mathcal{F}_{ik} &\quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{id} = \mathcal{G}_{ik} &\quad \text{si} \quad k = i + 1 \\ \mathcal{F}_{ig} = \mathcal{F}_{ik} &\quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{ig} = \mathcal{G}_{ik} &\quad \text{si} \quad k = i - 1.\end{aligned}\tag{1.57}$$

1.3.2.3 p -adaptivité

Les expressions (1.47) et (1.56) montrent que des éléments adjacents peuvent avoir des degrés d'approximation différents ; on parle alors de p -adaptivité. Ceci est possible via la définition des matrices de flux \mathcal{G} qui assurent le passage d'un élément à l'autre (cf. annexe A.3). Comme nous le verrons dans le chapitre 2, nous pouvons tirer bénéfice de la p -adaptivité afin de réduire l'impact des éléments sous-dimensionnés dans les maillages tétraédriques.

1.3.2.4 Cas des volumes finis

Dans le cas d'une approximation P_0 , les champs de vitesse et de contrainte sont constants par élément. Cette méthode GD particulière correspond à celle des volumes finis à l'ordre le plus faible. Pour le schéma P_0 , nous avons (Annexe A.3) :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i &= L_i \\ \mathcal{E}_i &= 0 \\ \mathcal{F}_{ik} &= \mathcal{G}_{ik} = 1.\end{aligned}\tag{1.58}$$

En substituant (1.58) dans (1.47) nous obtenons la formulation volumes finis avec flux centrés :

$$L_i \partial_t \mathbf{u}_i = \mathcal{A}_i \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} \mathbf{n}_{ik} [\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_k],\tag{1.59}$$

qui se simplifie en :

$$\partial_t \mathbf{u}_i = \mathcal{A}_i \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2L_i}.\tag{1.60}$$

Si les éléments ont une longueur constante $L_i = h$, il est facile de reconnaître dans l'équation (1.60) la formulation DF du second ordre (1.1) sur grille conventionnelle.

En substituant (1.58) dans (1.56), on obtient la formulation VF avec flux décentrés :

$$L_i \partial_t \mathbf{u}_i = [(\mathcal{A}_i^+ - \mathcal{A}_i^-) \mathbf{u}_i + \mathcal{A}_i^- \mathbf{u}_{i+1} - \mathcal{A}_i^+ \mathbf{u}_{i-1}],\tag{1.61}$$

qui se simplifie en :

$$\partial_t \mathbf{u}_i = \frac{|\mathcal{A}_i| \mathbf{u}_i + \mathcal{A}_i^- \mathbf{u}_{i+1} - \mathcal{A}_i^+ \mathbf{u}_{i-1}}{L_i}. \quad (1.62)$$

1.3.3 Formulation continue

Nous donnons ici, sans rentrer dans le détail, les principales caractéristiques des EF de type continu en insistant sur les différences conceptuelles avec les méthodes GD présentées précédemment. Dans la suite, nous concentrerons notre étude exclusivement sur les méthodes GD.

1.3.3.1 Éléments finis standards

Dans les méthodes EF standards, les fonctions de base, et donc les champs d'onde, sont continus entre les éléments (continuité des fonctions de type C^0)². Pour assurer cette continuité, on utilise classiquement des fonctions de base nodales et les valeurs nodales qui se trouvent à la frontière des éléments sont sommées afin de ne retenir qu'une seule valeur (la flèche bleue dans la figure 1.5.b est en fait une somme qui conduit au schéma 1.5.a). Contrairement aux méthodes GD, il n'y a pas d'échange de flux entre les éléments. Il demeure néanmoins un terme de flux qui s'applique seulement aux faces externes des éléments situés aux bords du modèle ($\Gamma_{externe}$). De plus, les matrices de masse et d'élasticité ne sont plus locales à l'élément mais deviennent globales. Dans le cas des formulations continues, le système (1.39) s'écrit :

$$\mathcal{K} \partial_t \mathbf{u} = F_{\Gamma_{externe}}(\mathbf{u}) - \mathcal{E} \mathbf{u}, \quad (1.63)$$

avec \mathbf{u} le vecteur qui contient l'ensemble des valeurs nodales et :

$$\mathcal{K} = \mathbf{A}_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i], \quad (1.64)$$

$$\mathcal{E} = \mathbf{A}_{i=1}^N \mathcal{A}_i \otimes \int_{\Omega_i} (\partial_x \varphi_{ir}) \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i], \quad (1.65)$$

²Pour assurer une continuité de type C^n (continuité des n-ième dérivées), on a recours à des éléments de type Hermite qui contiennent autant de valeurs nodales en chaque noeud qu'il y a de dérivées à considérer (Dhatt *et al.*, 2004).

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMQUES

où $\mathbf{A}_{i=1}^N$ désigne l'opérateur d'assemblage (Hughes, 2003). Les matrices \mathcal{K} et \mathcal{E} n'étant pas diagonales, le système (1.63) est par conséquent implicite et sa résolution peut s'avérer être une opération coûteuse sur le plan numérique.

1.3.3.2 Éléments spectraux

Comme les EF classiques, les ES utilisent des bases nodales mais tirent spécifiquement profit des noeuds de Gauss-Lobatto-Legendre, qui sont les zéros des polynômes de Legendre qui forment une base orthogonale sur l'intervalle $[-1, 1]$. La figure 1.6 montre la répartition de ces points et les polynômes de Lagrange associés au sein de l'élément de référence 1D. Les noeuds GLL ne sont pas équidistants et l'écart entre les noeuds est plus faible aux extrémités de l'élément. L'avantage principal de l'approche ES est d'utiliser

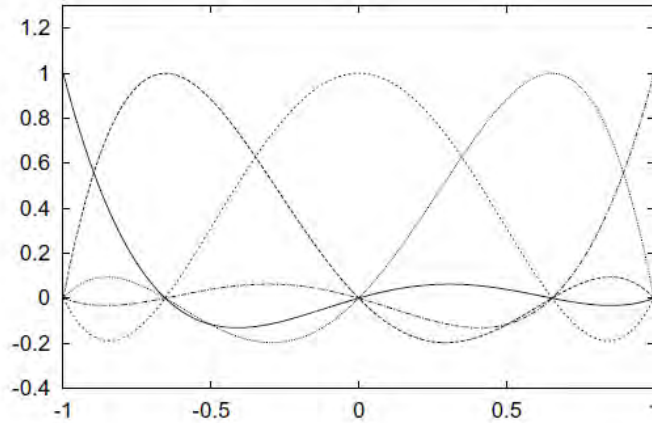


FIG. 1.6 – Polynômes de Lagrange de degré 4 dans l'élément de référence associés aux 5 noeuds GLL, d'après Chaljub *et al.* (2007).

une règle de quadrature (exacte jusqu'au degré $2d - 3$) pour le calcul des matrices qui repose également sur les points GLL (on parle de colocation). Ceci permet d'obtenir une matrice de masse purement diagonale qui rend le système (1.63) explicite. Un autre aspect essentiel des noeuds GLL est la convergence spectrale qu'ils procurent. La figure 1.7 montre l'évolution du déterminant de la matrice de Vandermonde en fonction du nombre de noeuds utilisés. Les points d'interpolation optimaux sont ceux qui maximisent cette valeur (Hesthaven & Warburton, 2008). Pour un faible nombre de noeuds ($d \leq 5$), on observe un comportement similaire entre les noeuds équidistants et GLL mais pour un nombre de noeuds plus grand, le déterminant croît de manière exponentielle avec les noeuds GLL mais décroît pour les noeuds équidistants. C'est le phénomène de Runge

(Davis, 1975). Il n'est donc pas judicieux d'adopter des noeuds équidistants lorsque l'on veut utiliser un grand nombre de noeuds par élément.

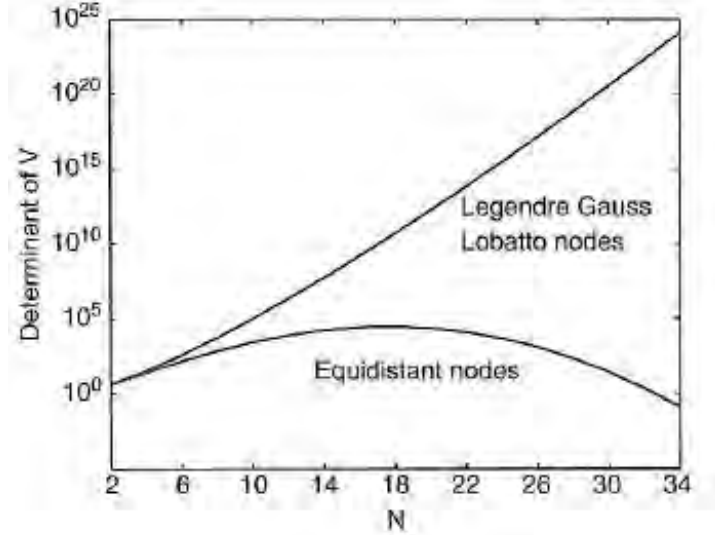


FIG. 1.7 – Evolution du déterminant de la matrice de Vandermonde en fonction du nombre de noeuds N de type GLL ou équidistants, d'après Hesthaven & Warburton (2008).

1.3.4 Discrétisation temporelle

1.3.4.1 Schéma saute-mouton

Le schéma saute-mouton consiste à calculer les champs de contrainte et de vitesse de manière décalée d'un demi-pas en temps. Pour cela, il est nécessaire de dissocier les composantes de vitesse et de contrainte dans les systèmes (1.47) et (1.56). Pour l'approche GD avec flux centré, le schéma saute-mouton s'écrit :

$$\mathcal{K}_i \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} \sigma_i^n + \mathcal{G}_{ik} \sigma_k^n] - \mathcal{E}_i \sigma_i^n \right]$$

$$\mathcal{K}_i \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\Delta t} = (\lambda_i + 2\mu_i) \left[\frac{1}{2} \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{G}_{ik} v_k^{n+\frac{1}{2}}] - \mathcal{E}_i v_i^{n+\frac{1}{2}} \right], \quad (1.66)$$

où n désigne l'indice du pas en temps et Δt le pas en temps. Ce schéma d'intégration temporel est du second ordre. De manière similaire, on développe pour l'approche GD

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

avec flux décentré, le schéma saute-mouton suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_i \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \mathcal{F}_{id} \left(\frac{V_{Pi}}{2} v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\rho_i} \sigma_i^n \right) + \mathcal{F}_{ig} \left(\frac{V_{Pi}}{2} v_i^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\rho_i} \sigma_i^n \right) \\
&+ \mathcal{G}_{id} \left(-\frac{V_{Pi}}{2} v_{i+1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\rho_i} \sigma_{i+1}^n \right) - \mathcal{G}_{ig} \left(\frac{V_{Pi}}{2} v_{i-1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\rho_i} \sigma_{i-1}^n \right) \\
&- \frac{1}{\rho_i} \mathcal{E}_i \sigma_i^n \\
\mathcal{K}_i \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\Delta t} &= \mathcal{F}_{id} \left(\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{2} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{V_{Pi}}{2} \sigma_i^n \right) - \mathcal{F}_{ig} \left(\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{2} v_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{V_{Pi}}{2} \sigma_i^n \right) \\
&+ \mathcal{G}_{id} \left(\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{2} v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{V_{Pi}}{2} \sigma_{i+1}^n \right) + \mathcal{G}_{ig} \left(\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{2} v_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{V_{Pi}}{2} \sigma_{i-1}^n \right) \\
&- (\lambda_i + 2\mu_i) \mathcal{E}_i v_i^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

1.3.4.2 Condition de stabilité

Le pas en temps est lié à la discrétisation spatiale par une condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (Courant *et al.*, 1928) qui s'exprime comme suit :

$$\Delta t < \min_i \left(\frac{1}{2k_i + 1} \cdot \frac{L_i}{V_{Pi}} \right), \tag{1.68}$$

où V_{Pi} désigne la vitesse des ondes P dans l'élément i . Notre approche est basée sur un pas de temps commun à l'ensemble des éléments. De ce fait, l'élément qui requiert le plus petit pas en temps impose ce dernier à tous les autres. Ceci pose des problèmes majeurs dans les maillages 3D où la présence d'éléments sous-dimensionnés est fortement pénalisante.

1.3.4.3 Schémas d'ordres élevés

Il peut s'avérer intéressant d'utiliser des schémas d'intégration temporelle d'ordres élevés si la méthode utilisée est également d'ordre élevé en espace. Dans ce sens, un schéma classique est le schéma Runge-Kutta qui peut se décliner à des ordres arbitraires mais dont l'efficacité semble médiocre au dessus de l'ordre 4 (Butcher, 1987). Aussi, le schéma ADER (*Arbitrary high order schemes using DERivatives*) a été introduit par Toro & Titarev (2002) en substituant les dérivées temporelles d'un développement de Taylor par des dérivées spatiales. Le schéma ADER a été utilisé dans le cadre des méthodes GD

en sismologie (Dumbser & Käser, 2006) permettant d'atteindre des ordres de convergence arbitraires en temps et en espace via l'utilisation de bases modales dans les tétraèdres (Dubiner, 1991).

1.3.5 Conditions initiales

1.3.5.1 Etat initial

Avec des bases nodales, il est aisé d'appliquer un champ de contrainte ou de vitesse initial. Il suffit d'injecter dans le système discret (1.66) ou (1.67), les valeurs aux noeuds des champs initiaux au temps t_0 .

1.3.5.2 Source ponctuelle

L'excitation d'une source ponctuelle est projetée sur les noeuds de l'élément i qui contient la source comme suit :

$$\mathbf{s}_{ij}^n = \frac{\varphi_{ij}(x_{src})}{\sum_{j=1}^{d_i} \varphi_{ij}(x_{src}) \int_{\Omega_i} \varphi_{ij}(x) dx} s(t) \quad \forall j \in [1, d_i], \quad (1.69)$$

où \mathbf{s}_{ij}^n est la j -ième valeur nodale du terme source, x_{src} la position de la source, n l'indice du pas en temps et $s(t)$ représente la fonction source (avec $t = n \Delta t$). Le terme \mathbf{s}_{ij}^n représente l'ensemble des valeurs nodales qu'il convient d'injecter dans la partie droite des systèmes discrets (1.66) ou (1.67) au niveau des composantes de vitesse ou de contrainte selon le type de source souhaité. Il est à noter que si la source coïncide avec la position d'un noeud (comme c'est forcément le cas avec l'approximation P_0), il est nécessaire de répartir l'excitation de la source sur plusieurs noeuds pour palier aux problèmes d'excitation partielle de la grille numérique (phénomène *red-black*, Press *et al.* (2007); Brossier *et al.* (2008)).

1.3.6 Conditions aux limites

1.3.6.1 Surface libre

La condition de surface libre est assurée en annulant les composantes normales de contrainte aux bords du modèle. Pour cela, nous pouvons introduire à chaque bord, un élément virtuel parfaitement symétrique de l'élément localisé au bord du modèle. Dans

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMOLOGIQUES

cet élément, nous imposons une contrainte opposée à l'élément miroir et une vitesse identique à ce dernier de manière à annuler le flux de la contrainte le long de la surface libre. La figure 1.8 représente les champs de vitesse et de contrainte dans un milieu homogène ($V_P = 4000$ m/s et $\rho = 1000$ kg/m³). On observe deux ondes qui se propagent à partir de la position de la source dans des sens opposés. Cette figure montre que la réflexion à la surface libre, inverse la polarité en ce qui concerne la composante de contrainte mais conserve la polarité pour la composante de vitesse.

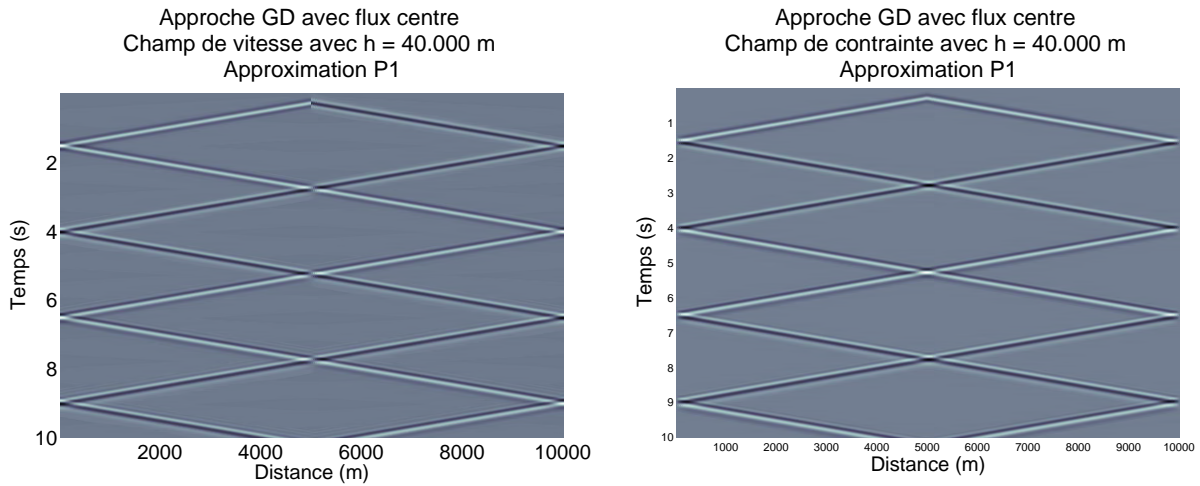


FIG. 1.8 – A gauche : champ de vitesse, en fonction du temps, obtenu avec une source de type Ricker (fréquence dominante de 4 Hz) localisée au milieu du modèle. A droite : champ de contrainte.

1.3.6.2 Bords absorbants

Pour réaliser des simulations en milieu infini, une condition absorbante est requise. A cette fin, de nombreuses formulations ont été proposées. On citera les conditions dites paraxiales (Clayton & Engquist, 1977) en 2D et 3D qui offrent une bonne efficacité pour une certaine plage d'angles d'incidence, mais qui s'avèrent inefficaces en dehors de cette plage. Ces conditions absorbantes s'appliquent uniquement aux bords du modèle et n'ajoutent donc aucun coût de calcul significatif. Afin d'améliorer l'absorption, des couches spécifiques ont été introduites. Initialement, l'approche reposait sur une atténuation progressive du champ d'onde à l'intérieur de ces couches (Cerjan *et al.*, 1985) mais c'est Berenger (1994) qui montra qu'une atténuation unidimensionnelle appliquée sur les composantes perpendiculaires aux couches offrait un coefficient de réflexion strictement

égal à zéro quelque soit l'angle d'incidence et quelque soit la fréquence. En réalité, le coefficient de réflexion est effectivement nul dans les milieux continus mais il ne l'est plus dans les milieux discrets. Cette formulation appelée PML (*Perfectly Matched Layer*) nécessite de modifier les équations de propagation en séparant artificiellement les composantes en sous-composantes normales et perpendiculaires aux PML. Afin de faciliter l'implémentation, nous avons adopté l'approche CPML (*Convolutionnal Perfectly Matched Layer*) (Roden & Gedney, 2000; Komatitsch & Martin, 2007; Drossaert & Giannopoulos, 2007) qui ne nécessite pas de réécrire le système élasto-dynamique mais qui repose sur un ensemble de variables mémoires. En outre, l'approche CPML offre une meilleure efficacité que la PML standard pour des angles d'incidence proches de 90 degrés pour les cas 2D et 3D.

Dans la suite, nous développons la formulation CPML pour l'approche GD avec flux centrés en 1D. Dans une CPML, on définit la fonction d'atténuation dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$s = \kappa + \frac{d}{\alpha + i\omega} \quad (1.70)$$

avec la fréquence angulaire ω , i le nombre imaginaire ($i = \sqrt{-1}$) et les coefficients $\kappa \geq 1$ et $\alpha \geq 0$. La fonction d'atténuation d varie de 0 à l'entrée de la couche absorbante jusqu'à une valeur maximale d_{max} à son extrémité (Collino & Tsogka, 2001) telle que :

$$d = d_{max} \left(\frac{\delta}{L_{cpml}} \right)^2, \quad (1.71)$$

et

$$d_{max} = -3V_P \frac{\log(R_{coeff})}{2L_{cpml}}, \quad (1.72)$$

avec δ la profondeur de l'élément dans la CPML, L_{cpml} l'épaisseur de la couche et R_{coeff} le coefficient théorique de réflexion que l'on souhaite obtenir. Le coefficient α varie d'une valeur maximale ($\alpha_{max} = \pi f_0$) à l'entrée de la CPML jusqu'à zéro à son extrémité. Dans la CPML, les dérivées spatiales sont remplacées par

$$\partial_{\bar{x}} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \partial_x + \zeta * \partial_x \quad (1.73)$$

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

avec

$$\zeta(t) = -\frac{d}{\kappa^2} H(t) e^{-(d\kappa+\alpha)t}, \quad (1.74)$$

et $H(t)$ la distribution de Heaviside. Roden & Gedney (2000) ont démontré que la convolution en temps dans l'équation (1.73) peut être effectuée par le biais de variables mémoires définies par :

$$\psi = \zeta * \partial_x. \quad (1.75)$$

ψ représente une variable mémoire qui est mise à jour à chaque pas de l'intégration temporelle. Dans la suite, nous suivons les observations de Komatitsch & Martin (2007) qui ont constaté que le terme κ avait un effet négligeable. Si l'on prend $\kappa = 1$ et que l'on dérive l'expression (1.75) en utilisant (1.74), on obtient :

$$\partial_t \psi = -d \partial_x - (d + \alpha) \psi. \quad (1.76)$$

Nous introduisons le vecteur des variables mémoires :

$$\psi(\mathbf{u}) = (\psi(v) \psi(\sigma))^T. \quad (1.77)$$

Si nous appliquons le changement de variable (1.73), le système (1.19) devient :

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathcal{A} \partial_x \mathbf{u} + \mathcal{A} \psi(\mathbf{u}). \quad (1.78)$$

L'équation (1.78) est le système élastodynamique initial augmenté des variables mémoires dans le terme de droite. A ce système, il faut ajouter un autre système portant sur les variables mémoires comme suit :

$$\partial_t \psi(\mathbf{u}) = -d \partial_x \mathbf{u} - (d + \alpha) \psi(\mathbf{u}). \quad (1.79)$$

Si l'on applique la formulation GD avec flux centré et schéma saute-mouton aux systèmes (1.78) et (1.79), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i \frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} \sigma_i^n + \mathcal{G}_{ik} \sigma_k^n] \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}_i \sigma_i^n + \mathcal{K}_i \psi(\sigma_i^n) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i \frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\Delta t} &= (\lambda_i + 2\mu_i) \left[\frac{1}{2} \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} v_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{G}_{ik} v_k^{n+\frac{1}{2}}] \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}_i v_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{K}_i \psi(v_i^{n+\frac{1}{2}}) \right], \end{aligned} \quad (1.80)$$

en combinaison du second système sur les variables mémoires :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i \frac{\psi(v_i^{n+\frac{1}{2}}) - \psi(v_i^{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} &= \left[-\frac{1}{2} d_i \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} v_i^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{G}_{ik} v_k^{n-\frac{1}{2}}] \right. \\ &\quad \left. + d_i \mathcal{E}_i v_i^{n-\frac{1}{2}} - (d_i + \alpha_i) \mathcal{K}_i \psi(v_i^{n-\frac{1}{2}}) \right] \\ \mathcal{K}_i \frac{\psi(\sigma_i^n) - \psi(\sigma_i^{n-1})}{\Delta t} &= \left[-\frac{1}{2} d_i \sum_{k \in \{i-1, i+1\}} n_{ik} [\mathcal{F}_{ik} \sigma_i^{n-1} + \mathcal{G}_{ik} \sigma_k^{n-1}] \right. \\ &\quad \left. + d_i \mathcal{E}_i \sigma_i^{n-1} - (d_i + \alpha_i) \mathcal{K}_i \psi(\sigma_i^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Les expressions (1.80) et (1.81) indiquent que la p -adaptivité est également supportée dans les CPML. A l'extrémité de la CPML, nous appliquons une condition de surface libre.

1.3.7 Etude de convergence

1.3.7.1 Mode propre fondamental

Nous étudions ici la convergence du schéma GD avec flux centré dont l'extension à 3 dimensions est présentée au prochain chapitre. Notre analyse se fonde sur la propagation d'un mode propre dans un segment unitaire ($L = 1$ m) homogène avec $V_P = 1$ m/s et $\rho = 1$ kg/m³. Les extrémités du segment sont libres (conditions de surface libre). Dans ce cas, la solution du mode propre fondamental est donnée par :

$$\begin{aligned} v &= \cos \pi x \cos \pi t \\ \sigma &= -\sin \pi x \sin \pi t. \end{aligned} \quad (1.82)$$

La solution est un champ monochromatique, avec une période T égale à 2 secondes, engendré par la propagation de 2 ondes P qui parcourent, de manière infinie dans le temps, le segment en sens inverses. La figure 1.9 montre les champs de vitesse et de contrainte pour un temps total $t = 5T$. La contrainte est toujours nulle aux extrémités du segment, ce sont les noeuds du mode fondamental et le milieu, lieu de l'amplitude

INTRODUCTION SUR LES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES

maximale, est le ventre du mode. Le champ de contrainte représente donc une vibration similaire à celle d'une corde de guitare. Les figures 1.10 et 1.11 représentent les champs

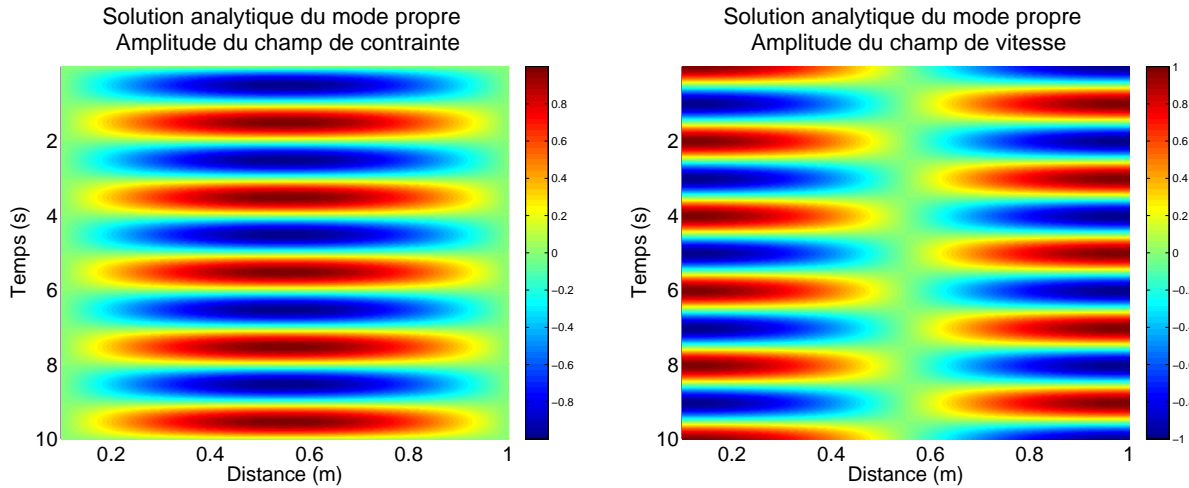


FIG. 1.9 – À gauche : solution analytique du mode propre fondamental dans le segment unitaire pour le champ de contrainte. À droite : idem avec le champ de vitesse.

de contrainte calculés par l'approche GD avec flux centré avec des éléments réguliers de tailles 0.1 m et 0.05 m respectivement. Sur ces figures, on peut se rendre compte du caractère discontinu des solutions. Le saut de contrainte est particulièrement abrupt pour l'approximation P_0 et tend à s'estomper avec les ordres supérieurs. En effet, les ordres supérieurs permettent une meilleure représentation du champ d'onde à l'intérieur de l'élément et par conséquent le saut entre les éléments est nécessairement plus petit.

On définit l'erreur entre les solutions en contrainte calculées (σ_c) et analytiques (σ_a) comme suit :

$$\text{Err} = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_{rec}} \sum_{n=1}^{N_T} (\sigma_c(i)^n - \sigma_a(i)^n)^2. \quad (1.83)$$

La figure 1.12 montre l'évolution de l'erreur au cours du temps jusqu'à $t = 10$ s pour un ensemble de 500 récepteurs répartis uniformément sur le segment unitaire. On observe après un délai d'environ de 1 s, que l'erreur semble se stabiliser pour tous les ordres. Cette stabilisation indique que l'erreur croît linéairement avec le temps (le calcul de l'erreur selon l'équation 1.83 inclut une normalisation par le nombre de pas en temps).

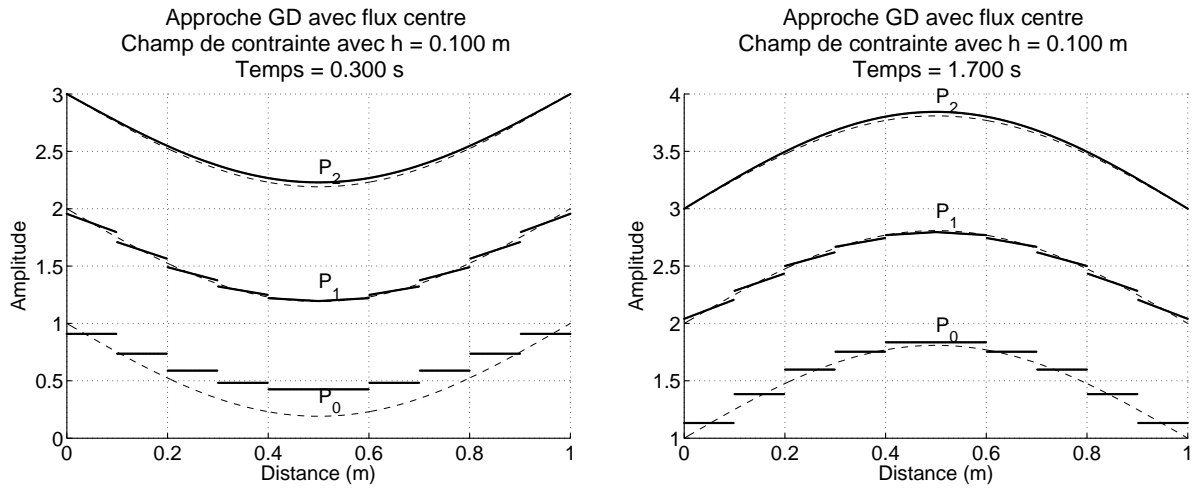


FIG. 1.10 – A gauche : champ de contrainte calculé à $t = 0.3$ s par l’approche GD avec flux centré dans l’étude du mode propre. La taille des éléments est 0.1 m. Lignes pleines : les solutions GD P_0 , P_1 et P_2 ; ligne pointillée : la solution analytique. A droite : idem pour $t = 1.7$ s.

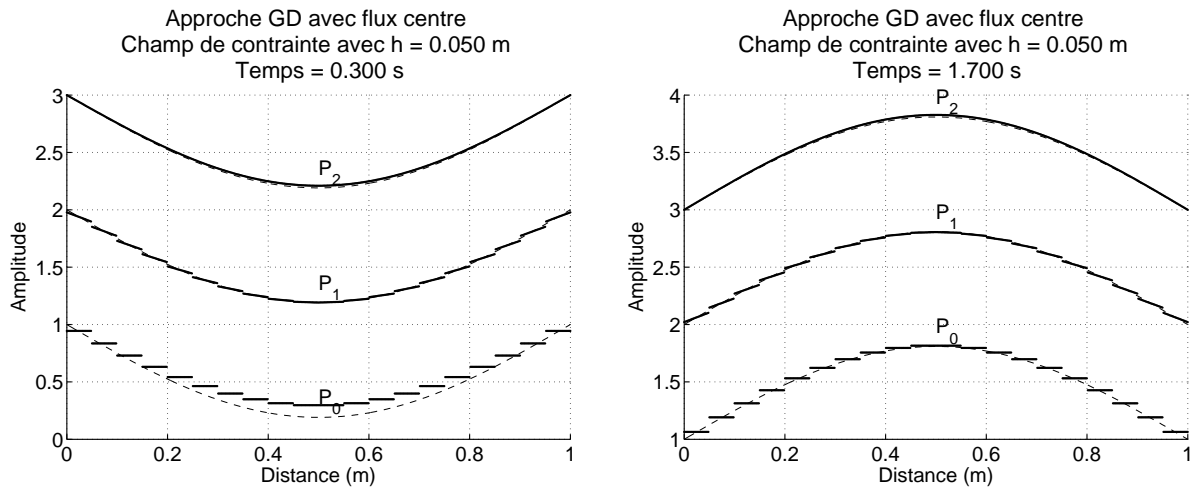


FIG. 1.11 – Idem figure 1.10 avec des éléments de taille 0.05 m.

1.3.7.2 Précision *versus* discrétisation spatiale

En représentant l’erreur en fonction de la taille des éléments, nous obtenons la courbe de convergence représentée dans la figure 1.13. Pour obtenir cette courbe, nous sommes partis d’un maillage avec des éléments réguliers de taille 0.1 m et nous avons divisé par

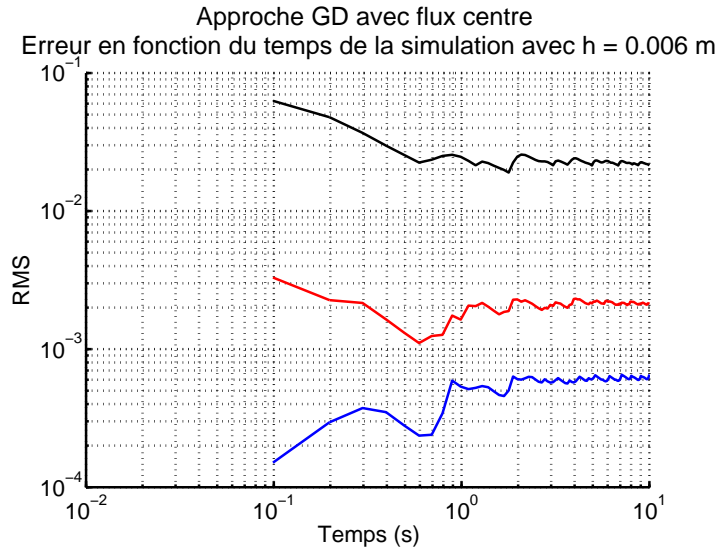


FIG. 1.12 – Erreur entre la solution analytique du champ de contrainte et la solution GD en fonction du temps. Courbe noire : formulation GD P_0 ; courbe rouge : P_1 ; courbe bleue : P_2 .

deux cette taille pour obtenir le maillage suivant, répétant cette procédure 4 fois pour obtenir une taille d'élément de 0.00625 m pour le maillage le plus fin. Nous constatons que, quelle que soit l'approximation considérée, la convergence est du second ordre, ordre d'intégration du schéma temporel saute-mouton employé. Cette conclusion est observée dans le cas d'éléments réguliers 1D et nous verrons dans le chapitre 2 que les conclusions diffèrent lorsque cette méthode GD est appliquée sur des éléments tétraédriques.

1.3.7.3 Précision *versus* temps de calcul

Il est intéressant de représenter l'erreur en fonction du temps de calcul comme cela est fait dans la figure 1.14. Il est à noter que les temps indiqués sont des temps d'exécution d'un code Matlab sur un ordinateur personnel. On ne peut donc pas tirer de conclusions définitives. Il n'en demeure pas moins que, dans le cas 1D, pour un temps de calcul donné, l'ordre P_0 semble procurer un niveau de précision accru par rapport aux approximations P_1 et P_2 . Là-aussi, nous verrons que le cas 3D conduit à des conclusions opposées.

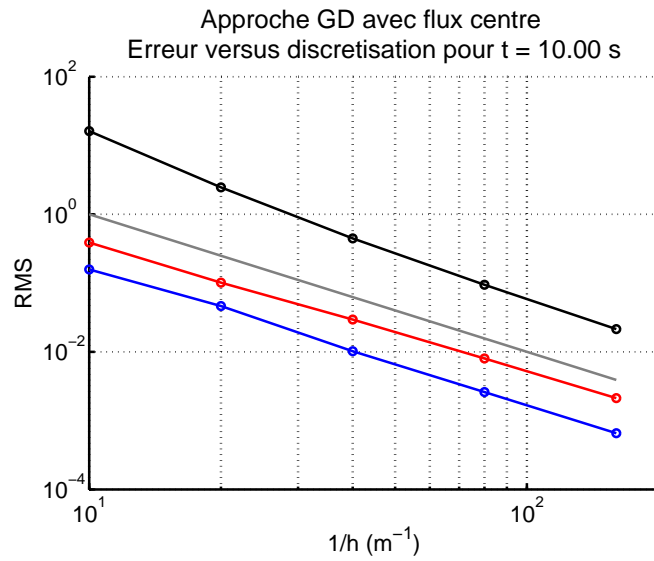


FIG. 1.13 – Erreur entre la solution analytique du champ de contrainte et la solution GD à $t = 10$ s, en fonction de l'inverse de la taille des éléments h . Courbe noire : formulation GD P_0 ; courbe rouge : P_1 ; courbe bleue : P_2 et en gris : pente de second ordre.

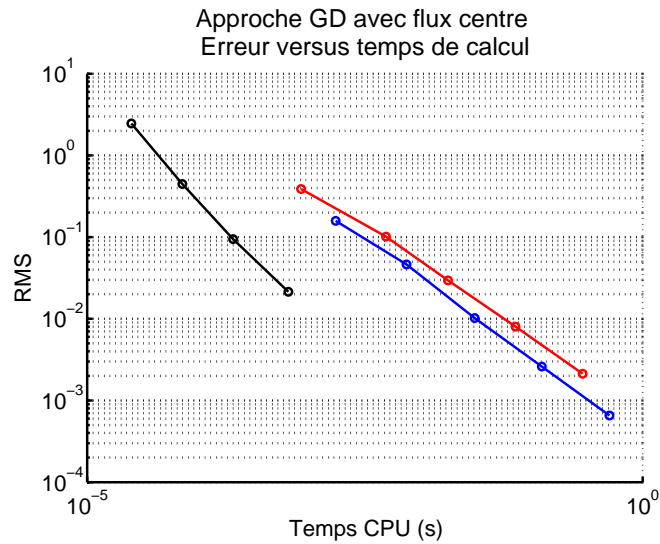


FIG. 1.14 – Erreur entre la solution analytique du champ de contrainte et la solution GD à $t = 10$ s, en fonction du temps de calcul. Courbe noire : formulation GD P_0 ; courbe rouge : P_1 ; courbe bleue : P_2 .

Chapitre 2

Méthode par éléments finis discontinus avec maillages tétraédriques

Sommaire

2.1	Construction des maillages 3D	70
2.1.1	Notions générales sur les maillages	70
2.1.2	Techniques de maillage	71
2.1.3	Types de maillages	75
2.2	Méthode par éléments finis discontinus en 3D	79
2.2.1	Présentation de l'article	79
2.2.2	Summary	79
2.2.3	Introduction	80
2.2.4	DG-FEM formulation	83
2.2.5	Computational aspects	88
2.2.6	Source excitation and boundary conditions	90
2.2.7	Accuracy of DG-FEM with tetrahedral meshes	101
2.2.8	<i>hp</i> -adaptivity	106
2.2.9	Application to complex medium	109
2.2.10	Perspectives and conclusions	116
2.2.11	Lagrangian basis functions	119
2.2.12	Matrices used in the DG-FEM formulation	120

2.1 Construction des maillages 3D

2.1.1 Notions générales sur les maillages

Pour les modélisations à 3 dimensions, la construction d'un maillage optimal est un aspect critique des méthodes EF. En effet, un maillage optimal permet une réduction efficace du nombre d'inconnues et une bonne représentation des caractéristiques du milieu considéré (topographie, interfaces, etc). Avant de présenter les techniques et les types de maillages les plus utilisés, nous introduisons quelques notions générales. Le lecteur peut consulter l'ouvrage de référence Frey & George (2008) pour de plus amples informations sur les maillages. Tout d'abord, nous rappelons, comme cela a été introduit dans le premier chapitre, que l'on définit un maillage comme un ensemble d'éléments géométriques. Si les arêtes et les faces des éléments coïncident exactement, on parle de maillage conforme (figure 2.1.a). Dans le cas contraire, on parle de maillage non conforme dont

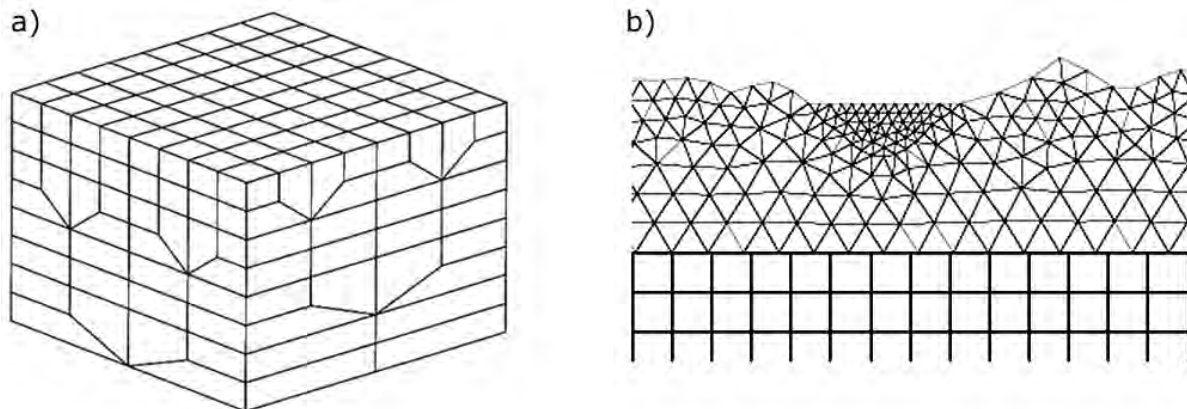


FIG. 2.1 – (a) Maillage conforme où la transition d'un maillage hexaédrique à un second maillage également hexaédrique mais 2 fois plus fin s'effectue par le biais de 'briques' de passage, d'après Komatitsch & Tromp (1999). (b) Maillage à la fois non conforme et hybride qui combine quadrangles et triangles, d'après Käser *et al.* (2008a).

un exemple est illustré dans la figure 2.1.b. De plus, un maillage est dit de type structuré si la connectivité (ou encore la topologie) entre ses éléments est établie selon un schéma régulier, comme par exemple selon une grille cartésienne. A ce titre, les maillages formés de quadrangles réguliers ou hexaèdres réguliers sont des maillages structurés. La division des quadrangles en deux triangles ou des hexaèdres en 5 tétraèdres produit également des maillages de type structurés (figure 2.2). Dans le cas où la connectivité ne suit pas un

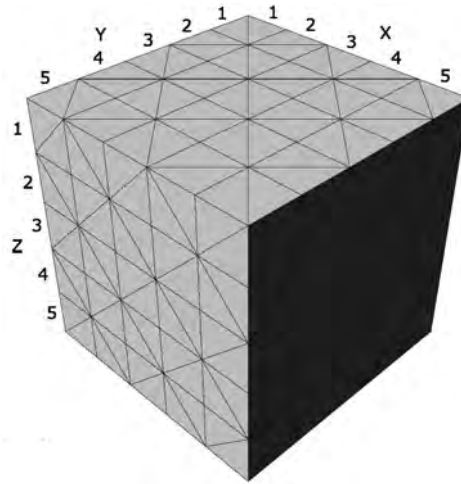


FIG. 2.2 – Maillage structuré construit par division de cubes en 5 tétraèdres. Il y a 5 cubes élémentaires dans chaque direction, soit un total de 625 tétraèdres.

schéma régulier, les maillages sont de type non structuré. Finalement, lorsqu'un maillage contient des éléments de différents types géométriques, on parle de maillage hybride (figure 2.1.b).

2.1.2 Techniques de maillage

La construction d'un maillage requiert l'utilisation d'un mailleur qui met généralement en oeuvre l'une des techniques décrites ci-dessous.

2.1.2.1 Technique *octree*

La technique *octree* (Shephard & Georges, 1991) tire son nom de la division d'un cube en 8 petits cubes. Il s'agit d'une technique de construction itérative qui s'applique aux maillages hexaédriques mais elle peut s'appliquer également à d'autres géométries comme les maillages tétraédriques. Le principe est le suivant : on part d'un maillage grossier, éventuellement régulier, et l'on parcourt l'ensemble des éléments dans le but de repérer les éléments surdimensionnés vis-à-vis des caractéristiques locales du milieu. Ces éléments seront subdivisés selon un schéma régulier (figure 2.3) et l'on répète cette opération à partir du nouveau maillage jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'élément à subdiviser. Un exemple d'application de la technique *octree* est donné dans la figure 2.6 qui illustre le cas d'un modèle avec bassin. Nous pouvons observer un raffinement prononcé à l'endroit

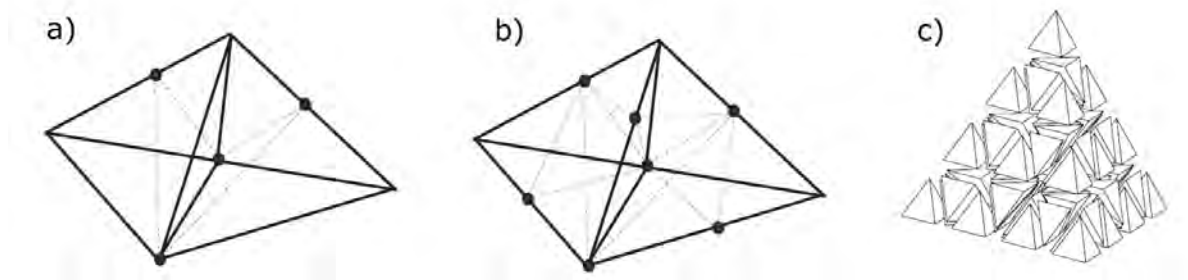


FIG. 2.3 – (a) Division d’un tétraèdre en 4. (b) Division d’un tétraèdre en 8. (c) Division d’un tétraèdre en 64, d’après Aagaard *et al.* (2001).

où les vitesses de propagation sont les plus faibles. Dans ce maillage, une contrainte sur la division des éléments a été prise en compte. Il ne peut y avoir qu’un seul niveau de division entre deux éléments adjacents. Par conséquent, la division d’un élément n’est pas un événement indépendant mais peut nécessiter la division d’autres éléments.

2.1.2.2 Technique par avancée de front

La technique par avancée de front (Lohner, 1996) est une approche où le maillage est construit progressivement en partant d’un bord du modèle par ajout d’éléments. Le maillage n’évolue qu’en aval du front, les éléments ayant été créés en amont ne sont plus susceptibles d’être modifiés. Si cette technique, s’avère efficace dans les maillages 2D triangulaires, elle pose des difficultés pour les maillages 3D tétraédriques, et nécessite dans certains cas de faire des rebroussements afin de modifier la géométrie des éléments en amont du front afin d’éviter des situations de blocage.

2.1.2.3 Triangulation de Delaunay

Le lemme général de Delaunay (Delaunay, 1934) est énoncé comme suit : ”Soient T des tétraèdres tout à fait arbitraires qui partagent uniformément l’espace à n dimensions étant contigus par des faces entières à $n-1$ dimensions et tel qu’un domaine limité (c’est-à-dire à diamètre limité) ait des points communs seulement avec un nombre limité de ces tétraèdres, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu’aucune sphère circonscrite à

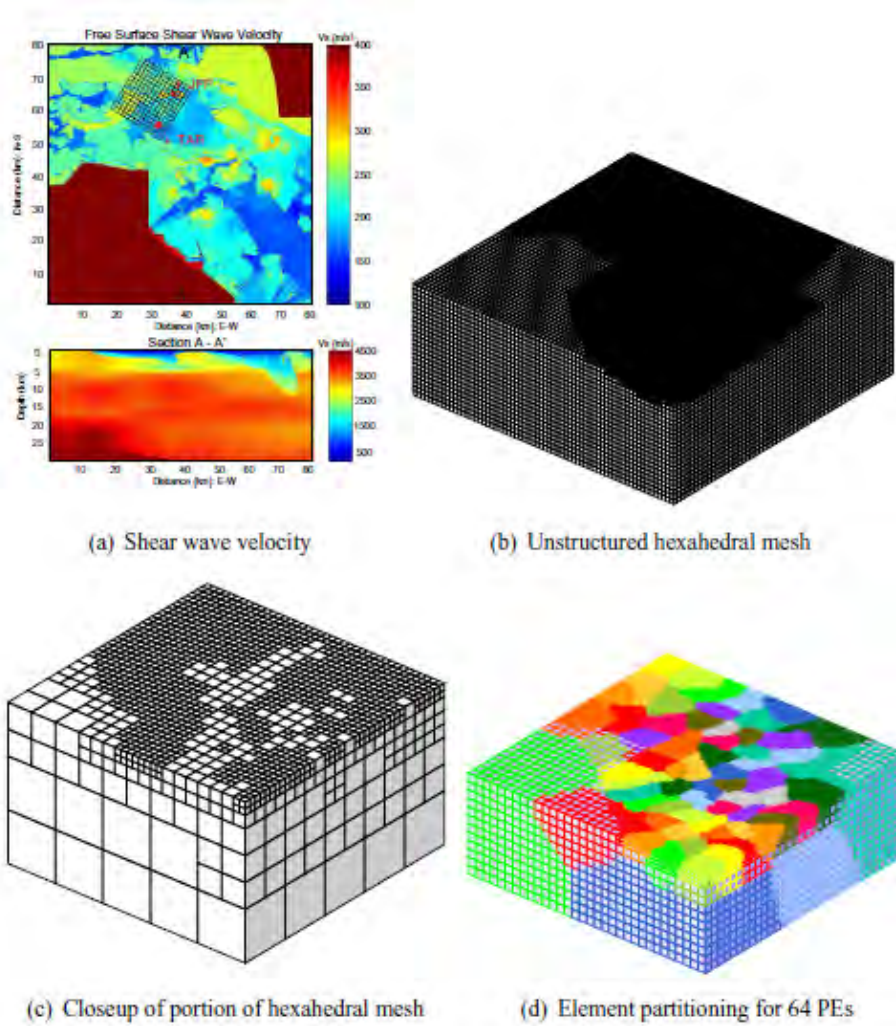


FIG. 2.4 – (a) Vue de la surface et en coupe du modèle de vitesse (ondes S) du bassin de Los Angeles. (b) Discrétisation du modèle par un maillage hexaédrique selon l’approche en *octree*. (c) Zoom du maillage en surface. (d) Partitionnement du maillage sur 64 processeurs, d’après Akcelik *et al.* (2003).

un tel tétraèdre ne contienne dans son intérieur aucun sommet d’aucun de ces tétraèdres est que cela ait lieu pour chaque paire de deux de ces tétraèdres contigus par une face à $n-1$ dimensions, c’est-à-dire que dans chaque telle paire, le sommet d’un de ces tétraèdres ne soit intérieur à la sphère circonscrite à l’autre, et réciproquement”.

La triangulation de Delaunay est une manière de construire des simplexes (triangles ou tétraèdres) à partir d’un ensemble de points donnés. Cette triangulation possède des propriétés remarquables : elle maximise l’angle minimal des éléments et maximise le rayon de la sphère circonscrite. On parle de triangulation de Delaunay contrainte, lorsqu’en plus

MÉTHODE PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS AVEC MAILLAGES TÉTRAÉDRIQUES

du critère de triangulation, on ajoute un critère sur la taille des éléments ou bien sur d'autres caractéristiques géométriques. Par exemple, on peut définir des bornes sur le facteur de qualité que l'on exige. Ce facteur est défini comme le rapport entre le rayon de la sphère inscrite et le plus petit côté (figure 2.5). Pour respecter ces contraintes, la triangulation peut nécessiter l'insertion de nouveaux noeuds en se basant selon différents algorithmes tel que celui de Shewchuk (1998) implémenté dans l'outil TETGEN (Si, 2006) que nous avons principalement utilisé dans ce travail. Cet algorithme permet en particulier de pallier à l'introduction d'éléments de type *sliver* qui sont des éléments dégénérés (de forme extrêmement aplatie) et qui pourtant possèdent un bon facteur de qualité.

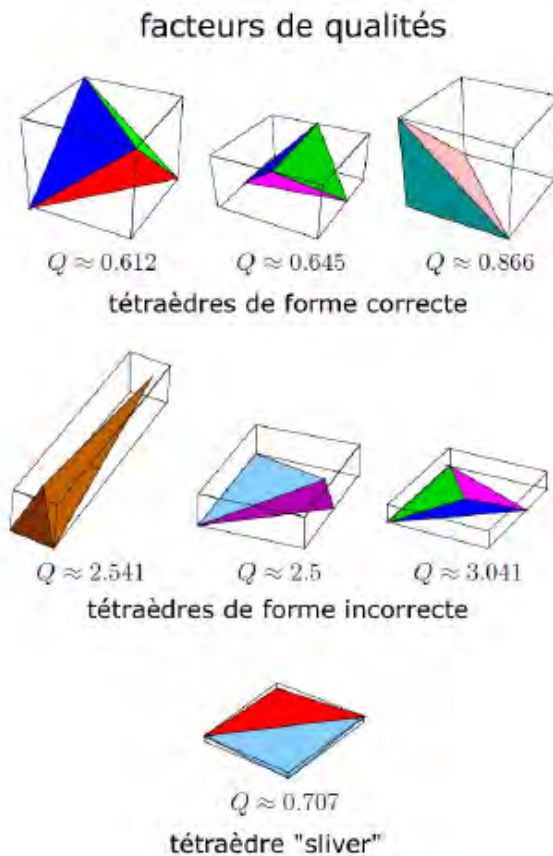


FIG. 2.5 – Facteurs de qualité pour des tétraèdres de différentes formes, d'après Si (2006).

2.1.3 Types de maillages

2.1.3.1 Maillage hexaédrique

Le maillage hexaédrique est l'un des deux types de maillages les plus souvent utilisés par les méthodes EF ; le deuxième type étant le maillage tétraédrique. Comme nous l'avons précédemment indiqué, les maillages hexaédriques se prêtent facilement au procédé par *octree*. Ce procédé relativement simple a l'avantage de pouvoir être parallélisé dans le cas des milieux de grandes dimensions. En revanche, cette approche repose sur un schéma structuré où les hexaèdres sont réguliers. Par conséquent, il est difficile de réaliser des maillages où les bords des éléments respectent précisément des interfaces irrégulières. Cette contrainte est un trait caractéristique des maillages hexaédriques. La flexibilité géométrique est en effet limitée lorsque l'on utilise exclusivement des hexaèdres et la création de maillages optimaux nécessite des opérations manuelles fastidieuses même dans des cas relativement peu complexes comme celui d'un bassin sédimentaire (figure 2.6). De même, il est délicat de raffiner localement un maillage hexaédrique, à moins d'adopter une approche non conforme. En revanche, il est possible de s'appuyer sur des topologies simples pour tirer profit du caractère structuré, synonyme d'une construction efficace et d'un partitionnement aisé du maillage. Un parfait exemple d'application est la construction du maillage hexaédrique pour les modélisations sismiques à l'échelle globale par la méthode ES. Ce procédé illustré dans la figure 2.7 consiste à diviser le globe en 6 portions qui sont des cubes déformés et qui épousent au centre de la sphère un cube régulier dont le rôle est d'éviter un raffinement excessif au centre de la sphère.

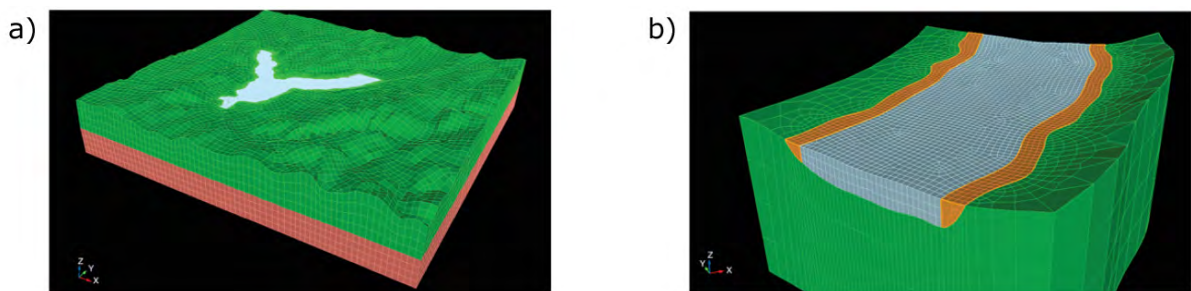


FIG. 2.6 – (a) Maillage hexaédrique utilisé pour des modélisation ES dans la vallée de Grenoble. Le maillage a été réalisé avec le mailleur CUBIT (Casarotti *et al.*, 2007). (b) Zoom du maillage au niveau du bassin, d'après Chaljub *et al.* (2010)

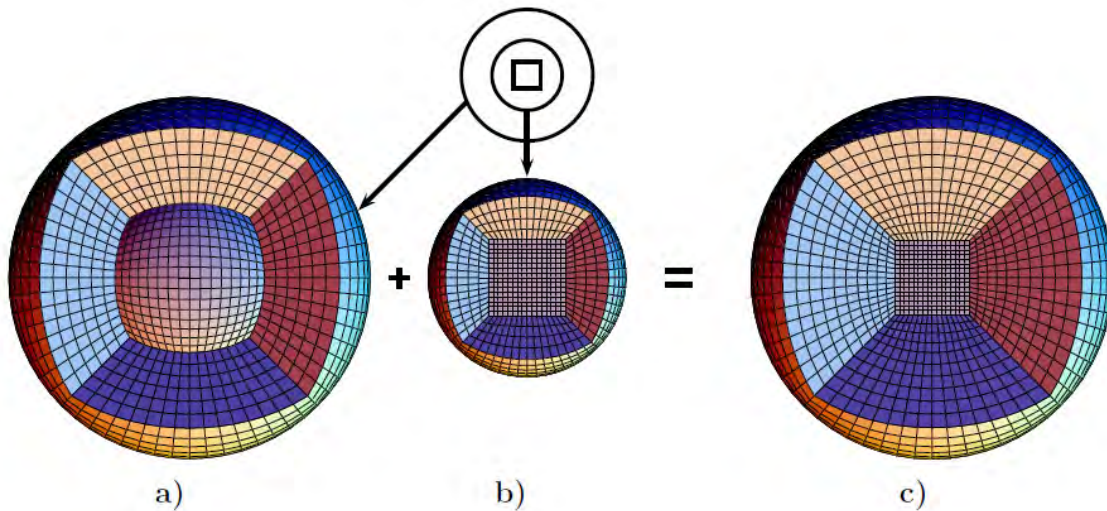


FIG. 2.7 – Construction du maillage hexaédrique pour les modélisations à l’échelle globale avec les ES. (a) Maillage des couches externe de la sphère. (b) Insertion d’un cube au centre d’une sphère. (c) Maillage global obtenu par assemblage de (a) et (b), d’après (Chaljub *et al.*, 2007).

2.1.3.2 Maillage tétraédrique

Les maillages tétraédriques offrent une plus grande flexibilité de construction par rapport aux maillages hexaédriques. Ils permettent de discrétiser facilement des formes complexes et se prêtent facilement à des opérations de raffinement. Dans ce travail, nous nous sommes appuyés sur la flexibilité des maillages tétraédriques afin d’obtenir une méthode hautement h -adaptative. Dans cet objectif, nous avons adopté un processus itératif pour la construction des maillages. Ce procédé a été en particulier dicté par les applications d’imagerie par inversion des formes d’onde. Pour ces applications, les milieux sont en général des milieux aux propriétés lisses et exempts d’interfaces (en dehors de la surface libre pour les modèles terrestres et de la bathymétrie pour les contextes marins). Par conséquent, la construction d’un maillage adaptatif ne peut s’effectuer via la définition d’interfaces ou de zones spécifiques mais doit pouvoir prendre en compte les propriétés du milieu décrites dans l’espace (comme par exemple selon une grille cartésienne). Pour y parvenir, nous avons suivi le principe de l’approche par *octree* qui consiste à subdiviser de manière itérative les éléments surdimensionnés. En revanche, nous conservons le caractère non-structuré des maillages tétraédriques. Au terme du processus de raffinement, nous obtenons un maillage adapté localement où chaque élément possède une taille opti-

male. Néanmoins, le procédé peut engendrer des éléments de très petites dimensions qui ont un effet néfaste sur les modélisations à cause du très petit pas en temps qu'ils imposent. Comme nous le verrons au prochain chapitre, nous avons développé une méthode GD qui tire profit de l'adaptation de l'ordre d'interpolation afin de réduire l'impact des éléments sous-dimensionnés.

Dans ce travail, nous avons utilisé les mailleurs tétraédriques TETGEN (Si, 2006) et GMSH (Geuzaine & Remacle, 2009). Pour la visualisation des maillages, nous avons eu recours à l'outil MEDIT (Frey, 2001) et pour la visualisation des champs calculés, nous avons la plupart du temps projeté les solutions sur des grilles de points cartésiennes pour traiter les résultats par des utilitaires génériques (Outils SU ou Matlab).

2.1.3.3 Maillage hybride

Nous avons indiqué que les maillages tétraédriques permettent de discrétiser des formes complexes et qu'ils permettent d'adapter la discrétisation selon les propriétés du milieu. En revanche, en l'absence d'interfaces et de forts contrastes des propriétés, l'intérêt des maillages tétraédriques est discutable. En effet, pour un même pas de discrétisation, le nombre d'éléments tétraédriques est de l'ordre de 5 fois supérieur au nombre d'hexaèdres, ce qui engendre un surcoût en terme du nombre d'inconnues. De plus, la condition de stabilité est plus draconienne dans les tétraèdres et impose un nombre supérieur de pas en temps. Aussi, il semble judicieux de pouvoir associer tétraèdres et hexaèdres au sein d'un même maillage afin de tirer bénéfice de ces deux types d'éléments en fonction des parties du modèle à discrétiser. En 2D, s'il est tout à fait possible de combiner triangles et quadrangles de manière conforme (figure 2.8), il n'est en revanche pas possible d'associer tétraèdres et hexaèdres de manière conforme en 3D. On peut alors employer des éléments de type prisme pour assurer la conformité.

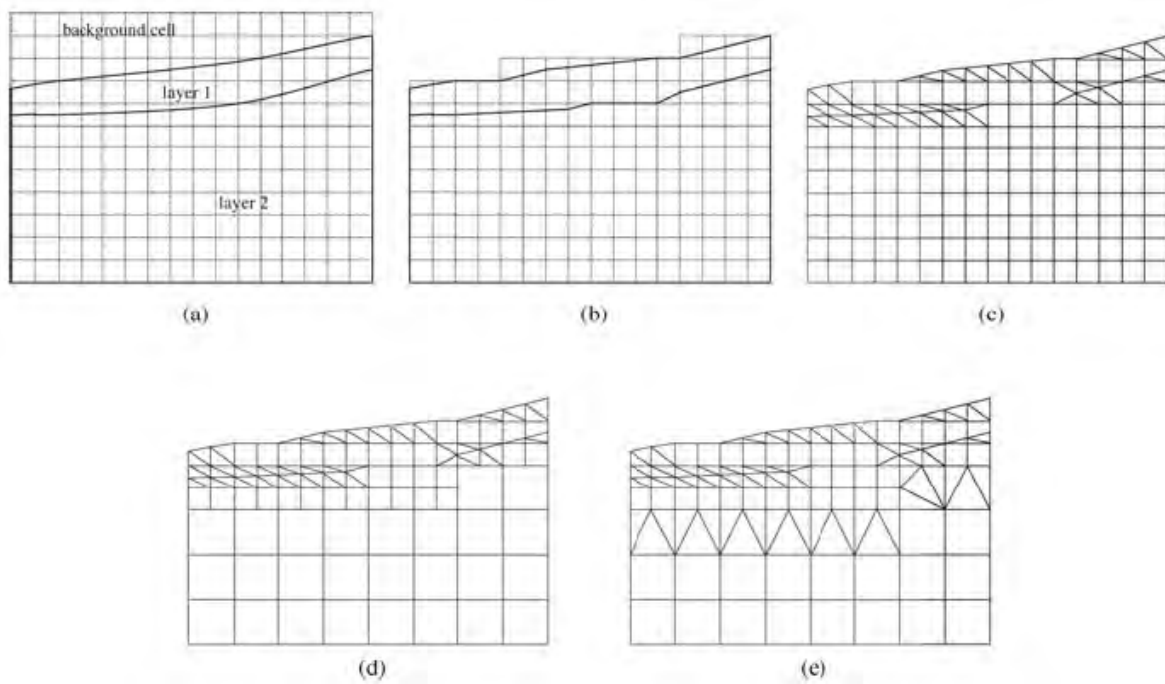


FIG. 2.8 – Exemple de maillage hybride. (a) Modèle initial avec maillage quadrangulaire régulier. (b) Les interfaces sont approximées afin d’éviter la génération d’éléments mal proportionnés. (c) Division des quadrangles en triangles le long des interfaces. (d) Division des éléments au besoin selon l’approche par *octree*. (e) Création des éléments de transitions pour assurer la conformité du maillage, d’après Ichimura *et al.* (2009).

2.2 Méthode par éléments finis discontinus en 3D

2.2.1 Présentation de l'article

Le développement de la méthode GD avec *hp*-adaptivité et maillage tétraédrique a fait l'objet d'une publication au *Geophysical Journal International* que nous reproduisons intégralement ci-dessous (Etienne *et al.*, 2010a). Nous montrons que cette méthode utilisée avec des ordres faibles permet de réaliser des modélisations dans des milieux fortement hétérogènes qui requièrent une fine discrétisation des propriétés physiques. Nous montrons également que le procédé de maillage itératif que nous avons adopté répond bien à la problématique de discrétisation d'un milieu arbitraire. Une application de la méthode est présentée dans le cadre du projet E-2VP dont l'objectif est d'étudier les effets de site dans un bassin sédimentaire. De manière assez surprenante, nous arrivons à obtenir de bons résultats alors même que nous utilisons des maillages qui ne respectent pas scrupuleusement les interfaces du bassin. Nous attribuons la qualité des résultats au fait que le maillage à proximité des interfaces est suffisamment fin pour que le champ d'onde ne soit pas altéré. Des observations similaires sur les effets d'une discrétisation imparfaite des interfaces ont été faites par Pelties *et al.* (2010) dans le contexte de modélisations GD avec maillage hexaédrique régulier.

2.2.2 Summary

We present a discontinuous Galerkin finite-element method (DG-FEM) formulation with Convolutional Perfectly Matched Layer (CPML) absorbing boundary condition for three-dimensional elastic seismic wave modelling. This method makes use of unstructured tetrahedral meshes locally refined according to the medium properties (*h*-adaptivity), and of approximation orders that can change from one element to another according to an adequate criterion (*p*-adaptivity). These two features allow us to significantly reduce the computational cost of the simulations. Moreover, we have designed an efficient CPML absorbing boundary condition, both in terms of absorption and computational cost, by combining approximation orders in the numerical domain. A quadratic interpolation is typically used in the medium to obtain the required accuracy, while lower approximation orders are used in the CPMLs to reduce the total computational cost and to obtain a well-balanced workload over the processors. While the efficiency of DG-FEMs have been largely demonstrated for high approximation orders, we favour the use of low approximation orders as they are more appropriate to the applications we are interested in.

In particular, we address the issues of seismic modelling and seismic imaging in cases of complex geological structures that require a fine discretisation of the medium. We illustrate the efficiency of our approach within the framework of the EUROSEISTEST verification and validation project, which is designed to compare high-frequency (up to 4 Hz) numerical predictions of ground motion in the Volvi basin (Greece). Through the tetrahedral meshing, we have achieved fine discretisation of the basin, which appears to be a *sine qua non* condition for accurate computation of surface waves diffracted at the basin edges. We compare our results with predictions computed with the Spectral Element Method (SEM), and demonstrate that our method yields the same level of accuracy with computation times of the same order of magnitude.

keywords

Computational seismology, wave propagation, surface waves and free oscillations, site effects.

2.2.3 Introduction

Over the last decades, simulations of wave propagation in complex media have been efficiently tackled with finite-difference methods (FDMs) and applied with success to numerous physical problems (Graves, 1996; Moczo *et al.*, 2007). Nevertheless, FDMs suffer from some critical issues that are inherent to the underlying Cartesian grid, such as parasite diffractions in cases where the boundaries have a complex topography. To reduce these artefacts, the discretisation should be fine enough to reduce the 'stair-case' effect at the free surface. For instance, a second-order rotated FDM requires up to 60 grid points per wavelength to compute an accurate seismic wavefield in elastic media with a complex topography (Bohlen & Saenger, 2006). Such constraints on the discretisation drastically restrict the possible field of realistic applications. Some interesting combinations of FDMs and finite-element methods (FEMs) might overcome these limitations (Galis *et al.*, 2008). The idea is to use an unstructured FEM scheme to represent both the topography and the shallow part of the medium, and to adopt for the rest of the model a classical FDM regular grid. For the same reasons as the issues related to the topography, uniform grids are not suitable for highly heterogeneous media, since the grid size is determined by the shortest wavelength. Except in some circumstances, like mixing grids (Aoi & Fujiwara, 1999) or using non uniform Cartesian grids (Pitarka, 1999) in the case of a low velocity

layer, it is almost impossible to locally adapt the grid size to the medium properties in the general case. From this point of view, FEMs are appealing, since they can use unstructured grids or meshes. Due to ever-increasing computational power, these kinds of methods have been the focus of a lot of interest and have been used intensively in seismology (Aagaard *et al.*, 2001; Akcelik *et al.*, 2003; Ichimura *et al.*, 2007). Usually, the approximation order remains low, due to the prohibitive computational cost related to a non-diagonal mass matrix. However, this high computational cost can be avoided by mass lumping, a standard technique that replaces the large linear system by a diagonal matrix (Marfurt, 1984; Chin-Joe-Kong *et al.*, 1999). Another class of FEMs that relies on the Gauss-Lobatto-Legendre quadrature points has removed these limitations, and allows for spectral convergence with high approximation orders. This high-order FEM, called the spectral element method (SEM), (Seriani & Priolo, 1994; Komatitsch & Vilotte, 1998), has been applied to large-scale geological models, up to the global scale (Chaljub *et al.*, 2007; Komatitsch *et al.*, 2008). The major limitation of SEM is the exclusive use of hexahedral meshes, which makes the design of an optimal mesh cumbersome in contrast to the flexibility offered by tetrahedral meshes. With tetrahedral meshes (Frey & George, 2008), it is possible to fit almost perfectly complex topographies or geological discontinuities and the mesh width can be adapted locally to the medium properties (*h*-adaptivity). The extension of the SEM to tetrahedral elements represents ongoing work, while some studies have been done in two dimensions on triangular meshes (Pasquetti & Rapetti, 2006; Mercerat *et al.*, 2006). On the other hand, another kind of FEM has been proven to give accurate results on tetrahedral meshes : the discontinuous Galerkin finite-element method (DG-FEM) in combination with the arbitrary high-order derivatives (ADER) time integration (Dumbser & Käser, 2006). Originally, DG-FEM was developed for the neutron transport equation (Reed & Hill, 1973). It has been applied to a wide range of applications such as electromagnetics (Cockburn *et al.*, 2004), aeroacoustics (Toulopoulos & Ekaterinaris, 2006) and plasma physics (Jacobs & Hesthaven, 2006), just to cite a few examples. This method relies on the exchange of numerical fluxes between adjacent elements. Contrary to classical FEMs, no continuity of the basis functions is imposed between elements, and therefore the method supports discontinuities in the seismic wavefield, as in the case of a fluid/solid interface. In such cases, the DG-FEM allows the same equation to be used for both the elastic and the acoustic media, and it does not require any explicit conditions on the interface (Käser & Dumbser, 2008), which is, on the contrary, mandatory for continuous formulations, like the SEM (Chaljub *et al.*, 2003). Moreover, the DG-FEM is completely local, which means that elements do not

share their nodal values, contrary to conventional continuous FEM. Local operators make the method suitable for parallelisation and allow for the mixing of different approximation orders (p -adaptivity).

However, in most studies, the DG-FEM is generally used with high approximation orders. Here, we present a low-order DG-FEM formulation with the convolutional perfectly matched layer (CPML) absorbing boundary condition (Roden & Gedney, 2000; Komatitsch & Martin, 2007) that is suitable for large-scale three-dimensional (3D) seismic wave simulations. In this context, the DG-FEM provides major benefits. Our approach relies intensively on the p -adaptivity. This last feature is crucial for efficient simulations, in order to mitigate the effects of the very small elements that are generally encountered in refined tetrahedral meshes. Indeed, the p -adaptivity allows an optimised time stepping to be achieved, by adapting the approximation order according to the size of the elements and the properties of the medium. The benefit of such a numerical scheme is particularly important with strongly heterogeneous media. Due to the mathematical formulation we consider, the medium properties are assumed to be constant per element. Therefore, meshes have to be designed in such a way that this assumption is compatible with the expected accuracy. In particular, we address the issues of seismic modelling and seismic imaging in complex media. In the first application, the discretisation must be able to represent the geological structures fairly, without over-sampling, while in the second, the spatial resolution of the imaging process puts constraints on the coarsest parameterisation of the medium. If we consider full waveform inversion (FWI) applications, the expected imaging resolution reaches half a wavelength, as shown by Sirgue & Pratt (2004). Therefore, following the Shannon theorem, a minimum number of four points per wavelength is required to obtain such accuracy. These reasons have motivated our development of DG-FEM with low orders. In the present study, we focus on the quadratic interpolation, which yields a good compromise between accuracy, discretisation and computational cost.

This article is structured as follows. In section 2.2.4, we review in detail the DG-FEM formulation, and introduce the concept of p -adaptivity. The implementation of the method on distributed memory machines is discussed in section 2.2.5. The source excitation and two kinds of boundary conditions are explained in section 2.2.6 : the free surface, and the absorbing boundary conditions. Special attention is paid to the latter with the detailed CPML formulation. The efficiency of the CPML is demonstrated with validation tests that in some cases reveal instabilities inside the absorbing layers. The strategy for saving CPU time and memory with low-order CPML is then presented.

In section 2.2.7, we study the convergence of the method, and the ability to compute accurate surface waves when a free surface is considered. The advantages of the hp -adaptivity in the context of tetrahedral meshes are discussed in section 2.2.8. Finally, in section ??, we illustrate the efficiency of our method, with a challenging seismological model, where the computation of surface waves is critical for the prediction of site effects.

2.2.4 DG-FEM formulation

2.2.4.1 Elastodynamic system

The equations governing particle velocity and stress in an isotropic elastic medium, namely the elastodynamic system (Virieux, 1986), is a first-order hyperbolic system. Following the approach of BenJemaa *et al.* (2009), the elastodynamic system can be written in the following pseudo-conservative form

$$\begin{aligned}\rho\partial_t\vec{v} &= \sum_{\theta\in\{x,y,z\}}\partial_\theta(\mathcal{M}_\theta\vec{\sigma})+\vec{f} \\ \Lambda\partial_t\vec{\sigma} &= \sum_{\theta\in\{x,y,z\}}\partial_\theta(\mathcal{N}_\theta\vec{v})+\Lambda\partial_t\vec{\sigma}_0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

with the definitions of the velocity and stress vectors as

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x\ v_y\ v_z)^T \\ \vec{\sigma} &= (\tau\ \tau'\ \tau''\ \sigma_{xy}\ \sigma_{xz}\ \sigma_{yz})^T,\end{aligned}\tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) \\ \tau' &= \frac{1}{3}(2\sigma_{xx}-\sigma_{yy}-\sigma_{zz}) \\ \tau'' &= \frac{1}{3}(-\sigma_{xx}+2\sigma_{yy}-\sigma_{zz}).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Due to the change of variables defined in eq. (2.3), the right-hand side of (2.1) does not include any terms that relate to the physical properties. \mathcal{M}_θ and \mathcal{N}_θ are constant real matrices (cf. 2.2.12). Λ is a diagonal matrix given by

$$\Lambda = \text{diag}\left(\frac{3}{3\lambda+2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{3}{2\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right),$$

where λ and μ are the Lamé parameters. Moreover, the diagonality of Λ is an essential point of our formulation since the inverse of this matrix is required for the computation of the stress components (eq. (2.1)). The extension of the pseudo-conservative form for the anisotropic or visco-elastic cases should be further analysed since the change of variable may depend on the physical parameters while the isotropic purely elastic case requires the simple global change of variables as shown in this study. Finally, in eq. (2.1), ρ is the medium density, while \vec{f} and $\vec{\sigma}_0$ are the external forces and the initial stresses, respectively.

2.2.4.2 Spatial discretisation

As is usual with FEMs (Zienkiewicz *et al.*, 2005), we want to approximate the solution of eq. (2.1) by means of polynomial basis functions defined in volume elements. The spatial discretisation is carried out with non-overlapping and conforming tetrahedra. We adopt the nodal form of the DG-FEM formulation (Hesthaven & Warburton, 2008), assuming that the stress and velocity vectors are approximated in the tetrahedral elements as follows

$$\begin{aligned}\widehat{\vec{v}}_i(\vec{x}, t) &= \sum_{j=1}^{d_i} \vec{v}_{ij}(\vec{x}_j, t) \varphi_{ij}(\vec{x}) \\ \widehat{\vec{\sigma}}_i(\vec{x}, t) &= \sum_{j=1}^{d_i} \vec{\sigma}_{ij}(\vec{x}_j, t) \varphi_{ij}(\vec{x}),\end{aligned}\tag{2.4}$$

where i is the index of the element, \vec{x} is the spatial coordinates inside the element, and t is the time. d_i is the number of nodes or degrees of freedom (DOF) associated with the interpolating Lagrangian polynomial basis function φ_{ij} relative to the j -th node located at position \vec{x}_j . The expressions of the Lagrangian basis functions are given in chapter 2.2.11. \vec{v}_{ij} and $\vec{\sigma}_{ij}$ are the velocity and stress vectors, respectively, evaluated at the j -th node of the element. Although it is not an intrinsic limitation, we have adopted here the same set of basis functions for the interpolation of the velocity and the stress components. In the following, the notation P_k refers to a spatial discretisation based on polynomial basis functions of degree k , and a P_k element is a tetrahedron in which a P_k scheme is applied. The number of DOF in a tetrahedral element is given by $d_i = (k+1)(k+2)(k+3)/6$. For instance, in a P_0 element (Fig. 2.9.a), there is only one DOF (the stress and velocity are constant per element), while in a P_1 element (Fig. 2.9.b), there are four DOF located at the four vertices of the tetrahedron (the stress and velocity are linearly interpolated). It

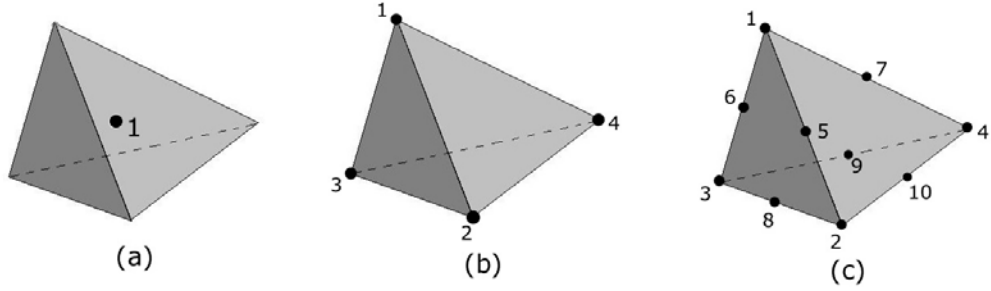


FIG. 2.9 – (a) P_0 element with one unique DOF. (b) P_1 element with four DOF. (c) P_2 element with 10 DOF.

is worth noting that the P_0 scheme corresponds to the case of the finite-volume method (BenJemaa *et al.*, 2007, 2009; Brossier *et al.*, 2008). For the quadratic approximation order P_2 , one node is added at the middle of each edge of the tetrahedron, leading to a total of 10 DOF per element (Fig. 2.9.c).

The first step in the finite-element formulation is to obtain the weak form of the elastodynamic system. To do so, we multiply eq. (2.1) by a test function φ_{ir} and integrate the system over the volume of the element i . For the test function, we adopt the same kind of function as used for the approximation of the solution. This case corresponds to the standard Galerkin method and can be written as

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \varphi_{ir} \rho \partial_t \vec{v} \, dV &= \int_{V_i} \varphi_{ir} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{M}_\theta \vec{\sigma}) \, dV \\ \int_{V_i} \varphi_{ir} \Lambda \partial_t \vec{\sigma} \, dV &= \int_{V_i} \varphi_{ir} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta (\mathcal{N}_\theta \vec{v}) \, dV \quad \forall r \in [1, d_i], \end{aligned} \quad (2.5)$$

where V_i is the volume of the tetrahedral element i . For the purpose of clarity, we have omitted the external forces and stresses in (2.5). Integration by parts of the right side of (2.5) leads to

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \varphi_{ir} \rho \partial_t \vec{v} \, dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{ir} (\mathcal{M}_\theta \vec{\sigma}) \, dV + \int_{S_i} \varphi_{ir} \left(\sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{M}_\theta n_\theta \right) \vec{\sigma} \, dS \\ \int_{V_i} \varphi_{ir} \Lambda \partial_t \vec{\sigma} \, dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{ir} (\mathcal{N}_\theta \vec{v}) \, dV + \int_{S_i} \varphi_{ir} \left(\sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{N}_\theta n_\theta \right) \vec{v} \, dS, \end{aligned}$$

with S_i as the surface of the element i , and $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ as the outward pointing unit normal vector with respect to the surface S_i . In the second term of the right-hand side of eq. (2.6), the fluxes of the stress and velocity wavefields across the faces of the element i appear. For evaluation of these fluxes, we adopt the centred flux scheme for its non-dissipative property (Remaki, 2000; BenJemaa *et al.*, 2009; Delcourte *et al.*, 2009). Using eq. (2.4) and assuming constant physical properties per element, eq. (2.6) can be approximated with

$$\begin{aligned} \rho_i \int_{V_i} \varphi_{ir} \partial_t \widehat{v}_i dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{ir} (\mathcal{M}_\theta \widehat{\sigma}_i) dV + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \int_{S_{ik}} \varphi_{ir} \mathcal{P}_{ik} (\widehat{\sigma}_i + \widehat{\sigma}_k) dS \\ \Lambda_i \int_{V_i} \varphi_{ir} \partial_t \widehat{\sigma}_i dV &= - \int_{V_i} \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_\theta \varphi_{ir} (\mathcal{N}_\theta \widehat{v}_i) dV + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \int_{S_{ik}} \varphi_{ir} \mathcal{Q}_{ik} (\widehat{v}_i + \widehat{v}_k) dS, \end{aligned} \quad (2.7)$$

with $k \in N_i$ representing the elements k adjacent to the element i , and S_{ik} the face between elements i and k . \mathcal{P} and \mathcal{Q} are defined as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ik} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_{ik\theta} \mathcal{M}_\theta \\ \mathcal{Q}_{ik} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} n_{ik\theta} \mathcal{N}_\theta, \end{aligned}$$

where $n_{ik\theta}$ is the component along the θ axis of the unit vector \vec{n}_{ik} of the face S_{ik} that points from element i to element k . Eq. (2.7) indicates that the computations of the stress and velocity wavefields in one element require information from the directly neighbouring elements. This illustrates clearly the local nature of DG-FEM. Using the tensor product \otimes , we obtain the expression

$$\begin{aligned} \rho_i (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \partial_t \vec{v}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k \right] \\ (\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i) \partial_t \vec{\sigma}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

where \mathcal{I}_3 represents the identity matrix. In eq. (2.8), the vectors \vec{v}_i and $\vec{\sigma}_i$ should be read as the collection of all nodal values of the velocity and stress components in the element

i. We now introduce the mass matrix

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{V_i} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dV \quad j, r \in [1, d_i], \quad (2.9)$$

the stiffness matrix

$$(\mathcal{E}_{i\theta})_{rj} = \int_{V_i} (\partial_\theta \varphi_{ir}) \varphi_{ij} dV \quad j, r \in [1, d_i], \quad (2.10)$$

with $\theta \in \{x, y, z\}$, and the flux matrices

$$(\mathcal{F}_{ik})_{rj} = \int_{S_{ik}} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dS \quad j, r \in [1, d_i] \quad (2.11)$$

$$(\mathcal{G}_{ik})_{rj} = \int_{S_{ik}} \varphi_{ir} \varphi_{kj} dS \quad r \in [1, d_i] \quad j \in [1, d_k]. \quad (2.12)$$

It is worth noting that in eq. (2.12), the DOF of elements i and k appear (d_i and d_k , respectively) indicating that the approximation orders are totally decoupled from one element to another. Therefore, the DG-FEM allows for varying approximation orders in the numerical scheme. This feature is referred to as p -adaptivity. Moreover, given an approximation order, these matrices are unique for all elements (with a normalisation according to the volume or surface of the elements) and they can be computed before hand with appropriate integration quadrature rules. The memory requirement is therefore low, since only a collection of small matrices is needed according to the possible combinations of approximation orders. The maximum size of these matrices is $(d_{max} \times d_{max})$ where d_{max} is the maximum number of DOF per element and the number of matrices to store is given by the square of the number of approximation orders mixed in the numerical domain. Details regarding the computation of the matrices are given in chapter 2.2.12. It should be mentioned that to retrieve both the velocity and the stress components, eq. (2.8) requires the computation of \mathcal{K}_i^{-1} , which can also be performed before hand.

Note that if we want to consider variations in the physical properties inside the elements, the pseudo-conservative form makes the computation of flux much easier and computationally more efficient than in the classical elastodynamic system. These properties come from the fact that in the pseudo-conservative form, the physical properties are located in the left-hand side of eq. (2.1). Therefore, no modification of the stiffness and flux matrices nor additional terms are needed in eq. (2.8) to take into account the

MÉTHODE PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS AVEC MAILLAGES TÉTRAÉDRIQUES

variation of properties. Only the mass matrix needs to be evaluated for each element and for each physical property according to the expression

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{V_i} \chi_i(\vec{x}) \varphi_{ir}(\vec{x}) \varphi_{ij}(\vec{x}) dV \quad j, r \in [1, d_i], \quad (2.13)$$

where $\chi_i(\vec{x})$ represents the physical property (ρ_i or one of the Λ_i components) varying inside the element.

2.2.4.3 Time discretisation

For the time integration of eq. (2.8), we adopt a second-order explicit leap-frog scheme that allows to compute alternatively the velocity and the stress components between a half time step. Eq. (2.8) can be written as

$$\begin{aligned} \rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n] \\ (\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} [(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}}], \end{aligned} \quad (2.14)$$

where the superscript n indicates the time step. We chose to apply the definition of the time step as given by Käser *et al.* (2008b), which links the mesh width and time step as follows

$$\Delta t < \min_i \left(\frac{1}{2k_i + 1} \cdot \frac{2r_i}{V_{P_i}} \right), \quad (2.15)$$

where r_i is the radius of the sphere inscribed in the element indexed by i , V_{P_i} is the P-wave velocity in the element, and k_i is the polynomial degree used in the element. Eq. (2.15) is a heuristic stability criterion that usually works well. However, there is no mathematical proof for unstructured meshes that guarantees numerical stability.

2.2.5 Computational aspects

As mentioned in section 2.2.4, the DG-FEM is a local method, and therefore it is naturally suitable for parallel computing. In our implementation, the parallelism relies on

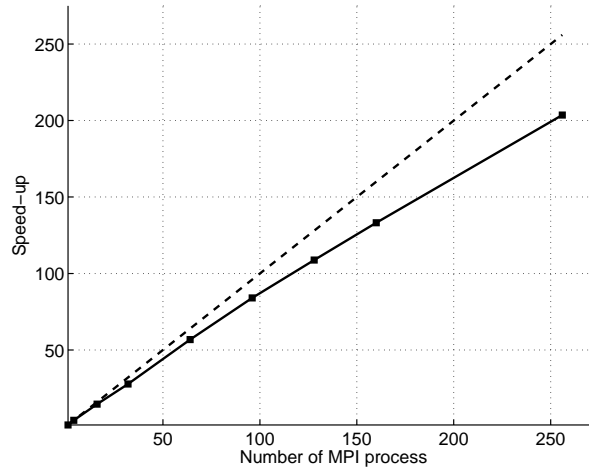


FIG. 2.10 – Speed-up observed when the number of MPI processes is increased from 1 to 256 for modelling with a mesh of 1.8 million P_2 elements. The ideal speed-up is plotted with a dashed line, the observed speed-up with a continuous line. These values were observed on a computing platform with bi-processor quad core Opteron 2.3 GHz CPUs interconnected with Infiniband at 20 Gb/s.

a domain-partitioning strategy, assigning one subdomain to one CPU. This corresponds to the single program multiple data (SPMD) architecture, which means that there is only one program and each CPU uses the same executable to work on different parts of the 3D mesh. Communication between the subdomains is performed with the message passing interface (MPI) parallel environment (Aoyama & Nakano, 1999), which allows for applications to run on distributed memory machines. For efficient load balancing among the CPUs, the mesh is divided with the partitioner METIS (Karypis & Kumar, 1998), to balance the number of elements in the subdomains, and to minimise the number of adjacent elements between the subdomains. These two criteria are crucial for the efficiency of the parallelism on large-scale numerical simulations. Fig. 2.10 shows the observed speed-up (i.e. the ratio between the computation time with one CPU, and the computation time with N CPUs) when the number of MPI processes is increased from 1 to 256, for strong scaling calculations on a fixed mesh of 1.8 million P_2 elements. This figure shows good efficiency of the parallelism, of around 80%.

In our formulation, another key point is the time step, which is common for all of the subdomains. The time step should satisfy the stability condition given in eq. (2.15) for every element. Consequently, the element with the smallest time step imposes its time step on all of the subdomains. We should mention here a more elaborate approach with local time stepping (Dumbser *et al.*, 2007b) that allows for elements to have their own

time step independent of the others. Nevertheless, the p -adaptivity offered by DG-FEM allows mitigation of the computational burden resulting from the common time step. This point is detailed in section 2.2.8. From a technical point of view, we implemented the method in the FORTRAN 90 langage without the use of specific mathematical librairies like Basic Linear Algebra Subroutines (BLAS). Indeed, the matrix products in the DG-FEM formulation involve relatively small matrices (typically 10×10 in P_2). Therefore, we did not experience substantial gains when calling mathematical libraries, as already observed by Komatitsch *et al.* (2008) for SEM.

2.2.6 Source excitation and boundary conditions

We consider here the implementation of a point source in the DG-FEM, and we detail two types of boundary conditions that are generally encountered in seismic modelling : the free surface, and the absorbing boundary conditions. Special attention is given to the latter, based on the CPML (Komatitsch & Martin, 2007; Drossaert & Giannopoulos, 2007). To our knowledge, this point has not been studied intensely in a DG-FEM framework.

2.2.6.1 Source excitation

The excitation of a point source is projected onto the nodes of the element that contains the source as follows

$$\vec{s}_i^n = \frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_s)}{\sum_{j=1}^{d_i} \varphi_{ij}(\vec{x}_s) \int_{V_i} \varphi_{ij}(\vec{x}) dV} s(t), \quad (2.16)$$

with \vec{s}_i^n the nodal values vector associated to the excited component, $t = n\Delta t$, \vec{x}_s the position of the point source and $s(t)$ the source function. Eq. (2.16) gives the source term that should be added to the right-hand side of eq. (2.14) for the required components. It should be noticed that this term is only applied to the element containing the source. Depending on the approximation order, the spatial support of the source varies. Fig. 2.11.a shows that the support of a P_0 element is actually the whole volume of the element (represented on the cross-section with a homogeneous white area). In this case, no precise localisation of the source inside the element is possible due to the constant piece-wise interpolation approximation. On the other hand, in a P_1 element (Fig. 2.11.b), the spatial support of the source is linear and allows for a rough localisation of the source. In a P_2

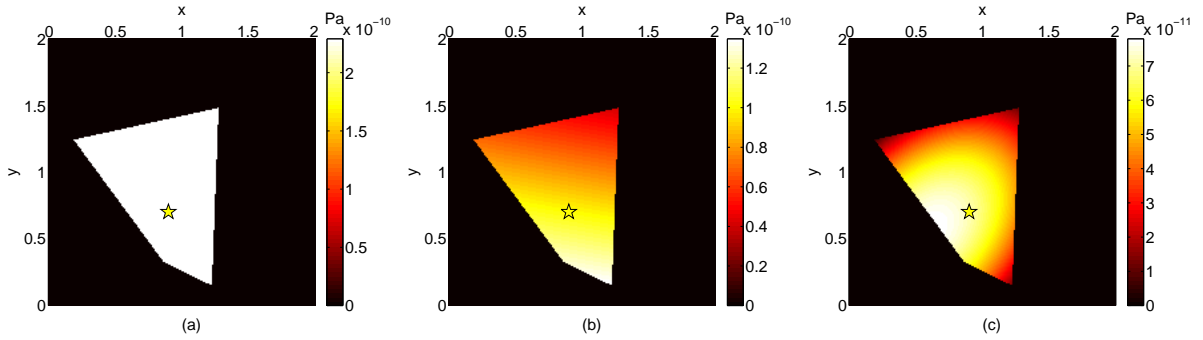


FIG. 2.11 – (a) Cross-section of the mesh near the source position, indicated with a yellow star in the xy plane. This view represents the spatial support of the stress component in a P_0 element containing the point source. (b) Same as (a) with a P_1 element. (c) Same as (a) with a P_2 element.

element (Fig. 2.11.c), the quadratic spatial support tends to resemble the expected Dirac in space close to the source position. It should be noted that the limitations concerning source localisation also apply to the solution extraction at the receivers, according to the approximation order of the elements containing the receivers.

2.2.6.2 Free surface condition

For the element faces located on the free surface, we use an explicit condition by changing the flux expression locally. This is carried out with the concept of virtual elements, which are exactly symmetric to the elements located on the free surface. Inside the virtual elements, we impose a velocity wavefield that is identical to the wavefield of the corresponding inner elements, and we impose an opposite stress wavefield. As a result, the velocity is seen as continuous across the free surface, while the stress is equal to zero on the faces related to the free surface.

2.2.6.3 Absorbing boundary condition

For simulations in an infinite medium, an absorbing boundary condition needs to be applied at the edges of the numerical model. An efficient way to mimic such an infinite medium can be achieved with PMLs, which was initially developed by Berenger (1994) for electromagnetics, and adapted for elastodynamics by Chew & Liu (1996). PMLs are anisotropic absorbing layers that are added at the periphery of the numerical model.

The classical PML formulation is based on splitting of the elastodynamic equations. In the following, we use a new kind of PML, known as CPML, which does not require split terms. The CPML originated from Roden & Gedney (2000) for electromagnetics and was applied by Komatitsch & Martin (2007) and Drossaert & Giannopoulos (2007) to the elastodynamic system. CPML is based on an idea of Kuzuoglu & Mittra (1996), who obtained a strictly causal form of PML by adding some parameters in the standard damping function of Berenger (1994), which enhanced the absorption of waves arriving at the boundaries of the model with grazing incidence angles.

CPML formulation

Inside the CPML, a damping function is applied only onto the spatial derivative perpendicular to the boundary. In the CPML formulation, the damping function is defined in the frequency domain as follows

$$s_\theta = \kappa_\theta + \frac{d_\theta}{\alpha_\theta + i\omega} \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}, \quad (2.17)$$

with angular frequency ω and coefficients $\kappa_\theta \geq 1$ and $\alpha_\theta \geq 0$. The damping profile d_θ varies from 0 at the entrance of the layer, up to a maximum real value $d_{\theta_{max}}$ at the end (Collino & Tsogka, 2001) such that

$$d_\theta = d_{\theta_{max}} \left(\frac{\delta_\theta}{L_{cpml}} \right)^2, \quad (2.18)$$

and

$$d_{\theta_{max}} = -3V_P \frac{\log(R_{coeff})}{2L_{cpml}} \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}, \quad (2.19)$$

with δ_θ as the depth of the element barycentre inside the CPML, L_{cpml} the thickness of the absorbing layer, and R_{coeff} the theoretical reflection coefficient. For all of the tests presented in the following, we chose $R_{coeff} = 0.1\%$. α_θ is a coefficient that varies from a maximum value ($\alpha_{\theta_{max}} = \pi f_0$) at the entrance of the CPML, to zero at its end. If $\kappa_\theta = 1$ and $\alpha_\theta = 0$, the classical PML formulation is obtained. In the CPML, the spatial derivatives are replaced by

$$\partial_{\bar{\theta}} \rightarrow \frac{1}{\kappa_\theta} \partial_\theta + \zeta_\theta * \partial_\theta \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}, \quad (2.20)$$

with

$$\zeta_\theta(t) = -\frac{d_\theta}{\kappa_\theta^2} H(t) e^{-(d_\theta \kappa_\theta + \alpha_\theta)t} \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}, \quad (2.21)$$

where $H(t)$ denotes the Heaviside distribution. Roden & Gedney (2000) have demonstrated that the time convolution in eq. (2.20) can be performed in a recursive way using memory variables defined by

$$\psi_\theta = \zeta_\theta * \partial_\theta \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}. \quad (2.22)$$

ψ_θ represents a memory variable in the sense that it is updated at each time step. Komatitsch & Martin (2007) showed that the term κ_θ has a negligible effect on the absorbing abilities, and it can be set to 1. If we take $\kappa_\theta = 1$ and derive eq. (2.22) using eq. (2.21), we get

$$\partial_t \psi_\theta = -d_\theta \partial_\theta - (d_\theta + \alpha_\theta) \psi_\theta \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}. \quad (2.23)$$

We can introduce the memory variables into the initial elastodynamic system of eq. (2.1) with the definition of vectors

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_\theta(\vec{v}) &= (\psi_\theta(v_x) \psi_\theta(v_y) \psi_\theta(v_z))^T \\ \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}) &= (\psi_\theta(\tau) \psi_\theta(\tau') \psi_\theta(\tau'') \psi_\theta(\sigma_{xy}) \psi_\theta(\sigma_{xz}) \psi_\theta(\sigma_{yz}))^T \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

If we apply the change of variables in eq. (2.20), eq. (2.1) becomes

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \vec{v} &= \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \partial_\theta (\mathcal{M}_\theta \vec{\sigma}) + \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \mathcal{M}_\theta \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}) \\ \Lambda \partial_t \vec{\sigma} &= \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \partial_\theta (\mathcal{N}_\theta \vec{v}) + \sum_{\theta \in \{x, y, z\}} \mathcal{N}_\theta \vec{\psi}_\theta(\vec{v}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Eq. (2.25) is the initial elastodynamic system augmented by the memory variables on the right-hand side. In combination, another extra system dealing with the memory variables is

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}) &= -d_\theta \partial_\theta(\vec{\sigma}) - (d_\theta + \alpha_\theta) \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}) \\ \partial_t \vec{\psi}_\theta(\vec{v}) &= -d_\theta \partial_\theta(\vec{v}) - (d_\theta + \alpha_\theta) \vec{\psi}_\theta(\vec{v}) \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

MÉTHODE PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS AVEC MAILLAGES TÉTRAÉDRIQUES

The collection of memory variables associated with each element located in the CPMLs is made of 22 memory variables per DOF. These variables correspond to the 22 spatial derivatives involved in eq. (2.1). If we apply the DG-FEM formulation as presented in the previous section to eq. (2.25) and eq. (2.26), we get

$$\begin{aligned}
\rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^n + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^n \right] \\
&+ (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{M}_\theta \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}_i^n) \\
(\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\sigma}_i^{n+1} - \vec{\sigma}_i^n}{\Delta t} &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}} + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
&+ (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \mathcal{N}_\theta \vec{\psi}_\theta(\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}), \tag{2.27}
\end{aligned}$$

in combination with the memory variable system

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}_i^n) - \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}_i^{n-1})}{\Delta t} &= d_{i\theta} (\mathcal{I}_6 \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{\sigma}_i^{n-1} \\
&- d_{i\theta} \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} n_{ik\theta} \left[(\mathcal{I}_6 \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{\sigma}_i^{n-1} + (\mathcal{I}_6 \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{\sigma}_k^{n-1} \right] \\
&- (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) (d_{i\theta} + \alpha_{i\theta}) \vec{\psi}_\theta(\vec{\sigma}_i^{n-1}) \\
(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) \frac{\vec{\psi}_\theta(\vec{v}_i^{n+\frac{1}{2}}) - \vec{\psi}_\theta(\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} d_{i\theta} (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{E}_{i\theta}) \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} \\
&- d_{i\theta} \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} n_{ik\theta} \left[(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{F}_{ik}) \vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}} + (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{G}_{ik}) \vec{v}_k^{n-\frac{1}{2}} \right] \\
&- (\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i) (d_{i\theta} + \alpha_{i\theta}) \vec{\psi}_\theta(\vec{v}_i^{n-\frac{1}{2}}) \quad \forall \theta \in \{x,y,z\}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Eq. (2.27) and eq. (2.28) indicate that p -adaptivity is also supported in the CPMLs. At the end of the CPMLs, we apply a simple free surface condition as explained in the previous section.

Validation tests

To validate the efficiency of the CPML, we present some simulations of wave propagation in a homogeneous, isotropic and purely elastic medium. The model size is $8 \text{ km} \times 8 \text{ km} \times 8 \text{ km}$, and the medium properties are : $V_P = 4000 \text{ m/s}$, $V_S = 2310 \text{ m/s}$ and $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. An explosive source is placed at coordinates $(x_s = 2000 \text{ m}, y_s = 2000 \text{ m}, z_s = 4000 \text{ m})$ and a line of receivers is located at coordinates $(3000 \text{ m} \leq x_r \leq 6000 \text{ m}, y_r = 2000 \text{ m}, z_r = 4000 \text{ m})$ with 500 m between receivers. The conditions of the tests are particularly severe, since the source and the receivers are located close to the CPMLs (at a distance of 250 m), thus favouring grazing waves. The source signature is a Ricker wavelet with a dominant frequency of 3 Hz and a maximum frequency of about 7.5 Hz. Due to the explosive source, only P-wave is generated and the minimum wavelength is about 533 m. The mesh contains 945,477 tetrahedra with an average edge of 175 m, making a discretisation of about 3 elements per λ_{min} . Fig. 2.12.c and 2.12.d show the results obtained with the P_2 interpolation and CPMLs of 10-elements width ($L_{cpml} = 1750 \text{ m}$) at all edges of the model. With the standard scale, no reflection can be seen from the CPMLs. When the amplitude is magnified by a factor of 100, some spurious reflections are visible. This observation is in agreement with the theoretical reflection coefficient ($R_{coeff} = 0.1\%$) in eq. (2.19). Fig. 2.13.a allows to compare the seismograms computed with CPMLs of 10-elements width and the seismograms computed in a larger model without reflection in the time window.

As shown by Collino & Tsogka (2001), the thickness of the absorbing layer plays an important role in the absorption efficiency. In Fig. 2.12.a and 2.12.b, the same test was performed with CPMLs of 5-elements width ($L_{cpml} = 875 \text{ m}$) at all edges of the model. Compared to Fig. 2.12.c and 2.12.d, the amplitude of the reflections have the same order of magnitude. Nevertheless, in the upper and left parts of the model, some areas with a strong amplitude appear close to the edges. These numerical instabilities arise at the outer edges of the CPMLs, and they expand over the complete model during the simulations.

Instabilities of PML in long time simulations have been studied in electromagnetics (Abarbanel *et al.*, 2002; Bécache *et al.*, 2004). In the following, we present a numerical stability study of CPML combined with DG-FEM for the elastodynamics. The results are shown in Fig. 2.14, with snapshots at long times for CPMLs of 5- and 10-elements widths. In these snapshots, the instabilities arise at the four corners of the model (at 20 s for the 10-elements width CPML). Tests with larger CPMLs (not shown) demonstrate that

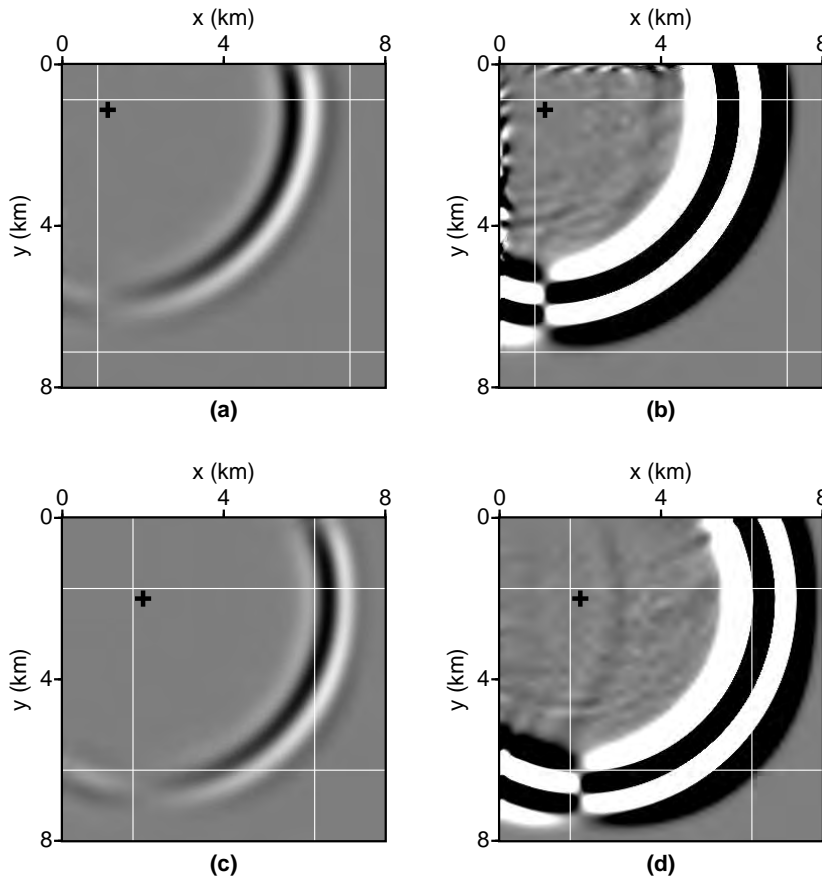


FIG. 2.12 – Snapshots at 1.6 s of the velocity component v_x in the plane xy that contains the source location. CPMLs of 10-elements width are applied at all edges of the model. The modelling was carried out with P_2 interpolation. White lines, the limits of the CPMLs; black cross, the position of the source. (a) Real amplitude. (b) Amplitude magnified by a factor of 100. (c) & (d) Same as (a) & (b) with CPMLs of 5-elements width.

when the CPML width is 20 elements, these instabilities do not appear. Such instabilities were experienced by Meza-Fajardo & Papageorgiou (2008) with standard PML, for an isotropic medium. These authors proposed the application of an additional damping in the PML, onto the directions parallel to the layer, leading to a multiaxial PML (M-PML). Fig. 2.15 is equivalent to Fig. 2.14, instead that 10% of the damping profile defined in eq. (2.18) has been added onto the directions parallel to the CPMLs (in the latter named M-CPMLs). As a result, instabilities do not appear when the CPML width is at least 10 elements while the efficiency of the absorption is preserved as shown by Fig. 2.13.b with similar residuals compared to Fig. 2.13.a.

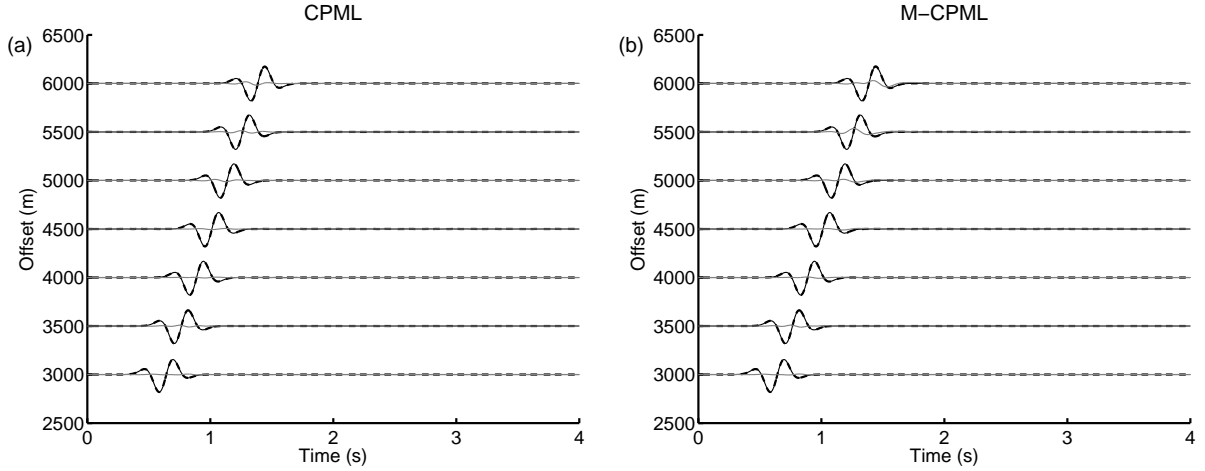


FIG. 2.13 – (a) Seismograms of the velocity component v_x . The amplitude of each seismogram is normalised. Black continuous line, numerical solution in large model without reflection in the time window ; dashed line, numerical solution with 10-elements width CPMLs ; grey line, residuals magnified by a factor of 10. (b) Same as (a) with 10-elements width M-CPMLs.

TAB. 2.1 – Computation times for updating the velocity and stress wavefields in one element for one time step. These values correspond to average computation times for a computing platform with bi-processor quad core Opteron 2.3 GHz CPUs interconnected with Infiniband 20 at Gb/s.

Approximation order	Element outside CPML	Element inside CPML
P_0	$2.6 \mu s$	$3.6 \mu s$
P_1	$5.0 \mu s$	$8.3 \mu s$
P_2	$21.1 \mu s$	$29.9 \mu s$

Saving computation time and memory

Table 2.1 gives the computation times for updating the velocity and stress wavefields in one element for one time step, for different approximation orders, without or with the update of the CPML memory variables (i.e. elements located outside or inside the CPMLs). These computation times illustrate the significant increase with respect to the approximation order, and they allow an evaluation of the additional costs of the CPML memory variables computation from 40% to 60%.

The effects of this additional cost have to be analysed in the context of a domain-

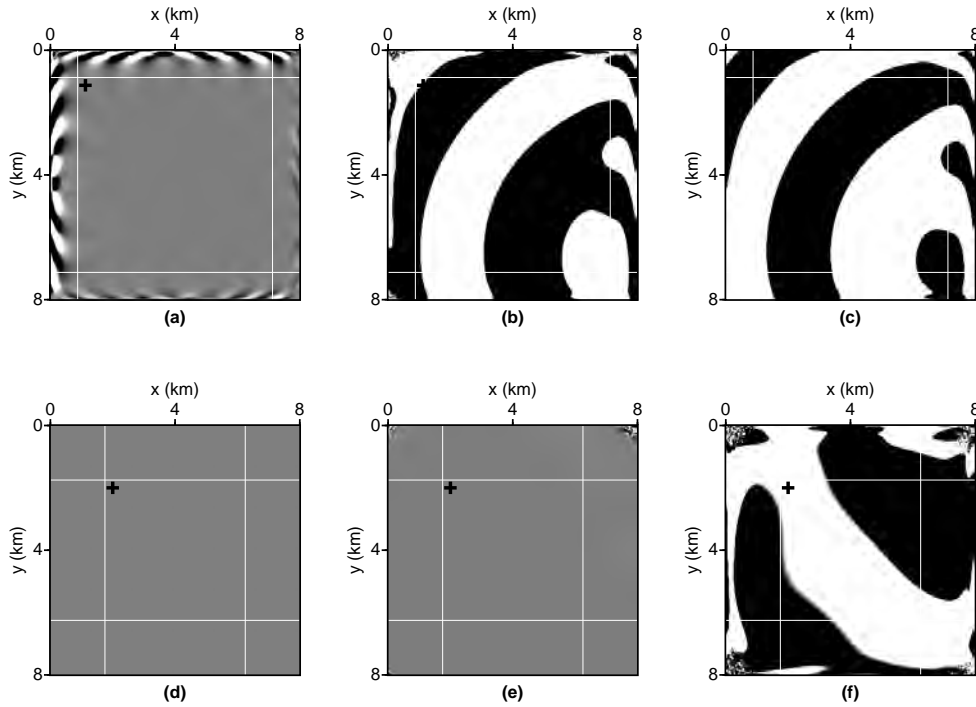


FIG. 2.14 – (a), (b) & (c) Snapshots of the velocity component v_x in the plane xy that contains the source location at 10, 20 and 30 s, respectively. The amplitude is plotted without any magnification factor. The modelling was carried out with P_2 interpolation. CPMLs with 5-elements width are applied at all edges of the model. White lines, the limits of the CPMLs ; black cross, the position of the source. (d), (e) & (f) Same as (a), (b) & (c), respectively, except with CPMLs of 10-elements width.

partitioning strategy. As introduced in section 2.2.5, the mesh is divided into subdomains, using a partitioner. Fig. 2.16.a shows the layout of the subdomains that were obtained with the partitioner METIS (Karypis & Kumar, 1998) along the xy plane used in the previous validation tests. The mesh was divided into 32 partitions, although only a few of these are visible on the cross-section in Fig. 2.16.a. We used an unweighted partitioning, meaning that each partition contains approximately the same number of elements.

The subdomains, partially located in the CPMLs, contain different numbers of CPML elements. In large simulations, some subdomains are totally located inside the CPMLs, and some others outside the CPMLs. In such a case, the extra computation costs of the subdomains located in the absorbing layers penalise the whole simulation. Indeed, most of the subdomains spend 40% to 60% of the time just waiting for the subdomains located in the CPMLs to complete the computations at each time step. For a better

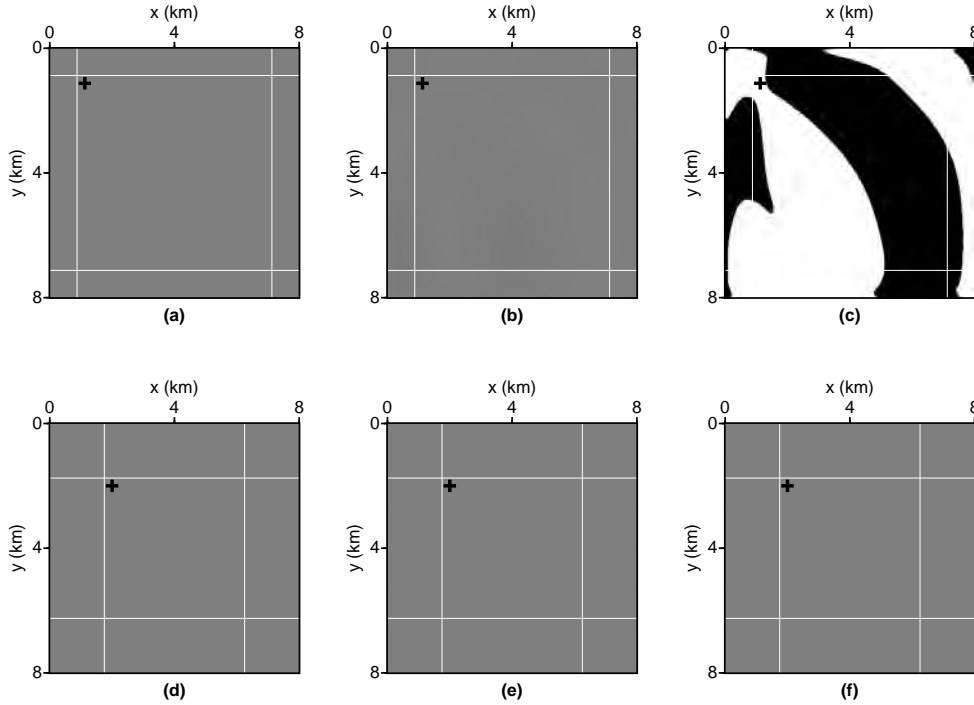


FIG. 2.15 – (a), (b) & (c) Snapshots of the velocity component v_x in the plane xy that contains the source location at 10, 20 and 30 s, respectively. The amplitude is plotted without any magnification factor. The modelling was carried out with P_2 interpolation. M-CPMLs with 5-elements width and 10% of the damping profile added onto the directions parallel to the layer were applied at all edges of the model. White lines, the limits of the M-CPMLs; black cross, the position of the source. (d), (e) & (f) Same as (a), (b) & (c), respectively, except with M-CPMLs of 10-elements width.

load balancing, we propose to benefit from the p -adaptivity of DG-FEM, using lower approximation orders in the CPMLs. Indeed, inside the absorbing layers, we do not need a specific accuracy, and consequently the approximation order can be decreased. Table 2.1 indicates that such a mixed numerical scheme is advantageous, since the computation time required for a P_0 or P_1 element located in the CPML is shorter than the computation time of a standard P_2 element. Fig. 2.16.b shows the approximation order per element when P_1 is used in the CPMLs and P_2 in the rest of the medium. We should note here that the interface between these two areas is not strictly aligned to a cartesian axis, and has some irregularities due to the shape of the tetrahedra. Although it is possible to constrain the alignment of the element faces parallel to the CPML limits, we did not observe significant differences in the absorption efficiency whether the faces are aligned or not.

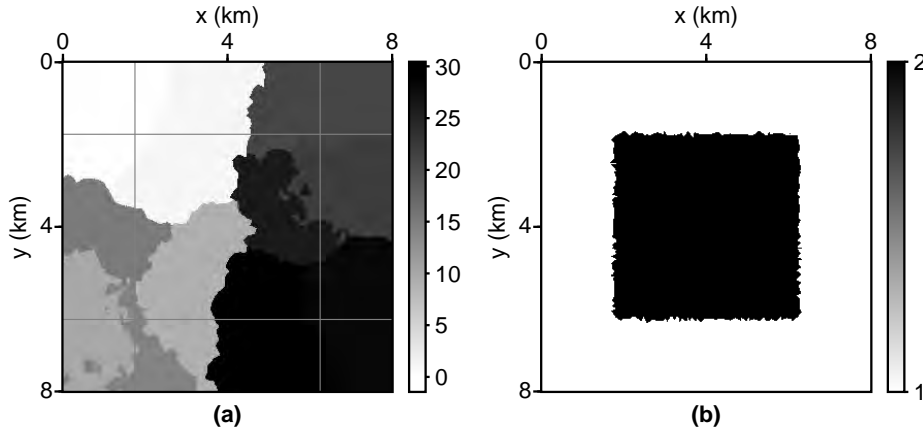


FIG. 2.16 – (a) Layout of the subdomains obtained with the partitioner METIS (Karypis & Kumar, 1998) along the xy plane that contains the source location. Grey lines, the limits of the CPMLs. The mesh was divided into 32 partitions, although only a few of these are visible on this cross-section. (b) View of the approximation order per element along the same plane. Black, the P_2 elements; white, the P_1 elements.

Fig. 2.17.a shows the seismograms computed when the modelling was carried out with P_2 inside the medium and P_1 in the CPMLs. Absorbing layers of 10-elements width are applied at all edges of the model. For comparison, Fig. 2.17.b shows the results obtained with P_0 in the CPMLs and P_2 for the rest of the medium. In this case, the spurious reflections have significant amplitudes. The snapshots (not presented here) reveal a large number of artefacts both in the CPMLs and in the medium. These artefacts make it impossible to use these seismograms for practical applications. On the other hand, the seismograms computed with the mixed scheme P_2/P_1 show weak artefacts, and are reasonably comparable with the seismograms obtained with complete P_2 modelling (compare Fig. 2.17.a and Fig. 2.13.a). Therefore, taking into account that the computation time and the memory consumption of the P_2/P_1 simulation are nearly half of those required with the full P_2 modelling, we can conclude that this mixed numerical scheme is of interest. It should be noticed that it is possible to adopt a weighted partitioning approach to overcome partly load balancing issues. Nevertheless, it does not prevent from using our mixed scheme approach which allows a significant reduction of the number of CPML memory variables. Actually, our strategy is totally compatible with a weighted partitioning and the combination of both would be more efficient than using only one of them. We should also stress that the saving in CPU time and memory provided with this kind of low-cost absorbing boundary condition is crucial for large 3D simulations, and this

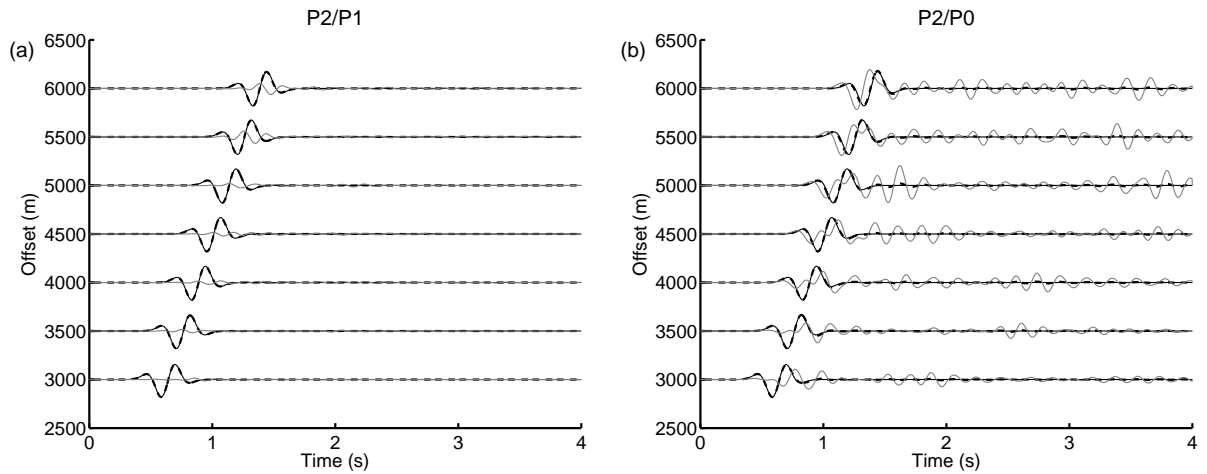


FIG. 2.17 – (a) Seismograms of the velocity component v_x . The amplitude of each seismogram is normalised. The modelling is done with P_1 in the CPMLs and P_2 inside the medium. Black continuous line, numerical solution in large model without reflection in the time window; dashed line, numerical solution with 10-elements width CPMLs; grey line, residuals magnified by a factor of 10. (b) Same as (a) except the modelling is done with P_0 in the CPMLs and P_2 inside the medium.

becomes a must in the context of 3D seismic imaging applications that require a lot of forward problems, such as FWI.

2.2.7 Accuracy of DG-FEM with tetrahedral meshes

There are a variety of studies in the literature concerning the dispersive and dissipative properties of DG-FEM with reference to wave-propagation problems. To cite but a few examples : Ainsworth *et al.* (2006) provided a theoretical study for the 1D case; Basabe *et al.* (2008) analysed the effects of basis functions on 2D periodic and regular quadrilateral meshes; and Käser *et al.* (2008b) discussed the convergence of the DG-FEM combined with ADER time integration and 3D tetrahedral meshes. More related to our particular concern here, Delcourte *et al.* (2009) provided a convergence analysis of the DG-FEM with a centred flux scheme and tetrahedral meshes for elastodynamics. They demonstrated the sensitivity of the DG-FEM to the mesh quality, and they proved that the convergence is limited by the second-order time integration we have used in the present study, despite the order of the basis function.

TAB. 2.2 – Average edge length, minimum and maximum insphere radius and number of elements of the unstructured tetrahedral meshes used for the convergence study

Mesh	1	2	3	4	5	6
Average edge (m)	0.19	0.12	0.08	0.05	0.04	0.03
Min. insphere radius (m)	0.0203	0.0132	0.0078	0.0048	0.0030	0.0019
Max. insphere radius (m)	0.0486	0.0304	0.0211	0.0155	0.0117	0.0087
Number of elements	1561	5357	17932	49822	154297	388589

2.2.7.1 Convergence study

We present a convergence analysis of the DG-FEM P_2 , P_1 and P_0 schemes following the approach of Delcourte *et al.* (2009). The analysis is based on the propagation of an eigenmode in a unit cube with a free surface condition applied at all faces. The properties of the cube are $V_P = 1$ m/s, $V_S = 0.5$ m/s and $\rho = 1$ kg/m³. According to these parameters, the solution of the eigenmode (1,1,1) is given by

$$\begin{aligned}
 v_x &= \cos(\pi x) (\sin(\pi y) - \sin(\pi z)) \cos(\Omega t) \\
 v_y &= \cos(\pi y) (\sin(\pi z) - \sin(\pi x)) \cos(\Omega t) \\
 v_z &= \cos(\pi z) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \cos(\Omega t) \\
 \sigma_{xx} &= -A \sin(\pi x) (\sin(\pi y) - \sin(\pi z)) \sin(\Omega t) \\
 \sigma_{yy} &= -A \sin(\pi y) (\sin(\pi z) - \sin(\pi x)) \sin(\Omega t) \\
 \sigma_{zz} &= -A \sin(\pi z) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\Omega t) \\
 \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

where $A = 1/\sqrt{2}$ and $\Omega = \pi/\sqrt{2}$. In order to assess the convergence rate of the method, we made several tests with different unstructured tetrahedral meshes with the characteristics summarized in Table 2.2. The initial conditions are imposed at each node of the elements by setting the velocities at $t = 0$ and the stresses at $t = \Delta t/2$ following eq. (2.29). We place a bunch of receivers according to a cartesian grid that matches the size of the cube. The spacing between receivers is 0.1 m, making a total number of 1331 receivers ($11 \times 11 \times 11$). At each receiver, a sinusoidal signal with a period of $T = 2\sqrt{2}$ seconds should be observed. This monochromatic signal corresponds to the propagation of P-waves across the cube that are continuously reflected at the cube faces. Consequently, we can establish a relationship between the simulation time and the propagated

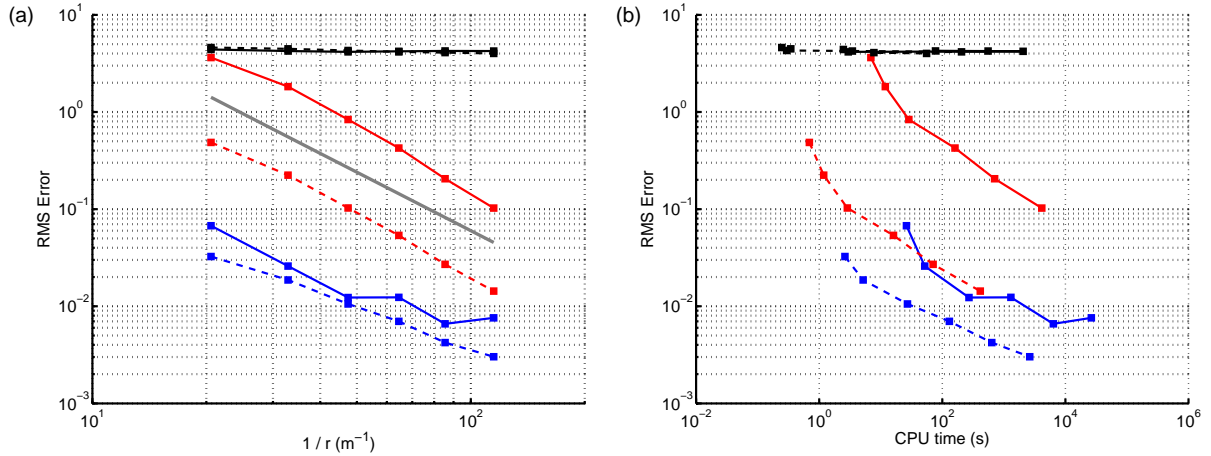


FIG. 2.18 – (a) Root mean square error between the analytical and numerical solutions *versus* the inverse of the maximum insphere radius r . Black dashed line, the error against the P_0 solution at $t = 5T$; black continuous line, the error against P_0 at $t = 50T$; red dashed line, the error against the P_1 solution at $t = 5T$; red continuous line, the error against P_1 at $t = 50T$; blue dashed line, the error against the P_2 solution at $t = 5T$; blue continuous line, the error against P_2 at $t = 50T$; grey curve, second-order slope. (b) Same as (a) except the root mean square error is plotted *versus* the elapsed computation time. The tests have been performed with 32 CPUs on a computing platform with bi-processor quad core Opteron 2.3 GHz CPUs interconnected with Infiniband at 20 Gb/s

distance. In the Fig. 2.18.a, we present the normalised RMS error between the analytical and numerical solutions at $t = 5T$ and at $t = 50T$, corresponding to a propagation of 5 and 50 wavelengths respectively. We can observe that no convergence is achieved with P_0 while a second-order convergence is observed for both P_1 and P_2 at $t = 5T$. As expected, an increase of the error is seen at longer times, resulting from the accumulation of errors with time iterations. At $t = 50T$, a second-order convergence is still observed for P_1 while the convergence of P_2 becomes more erratic.

The seismograms of Fig. 2.19.a and Fig. 2.19.a represent the v_x component observed at short and long times respectively. These seismograms have been recorded at the position ($x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0.5$ m) with the mesh # 4. At short times, we can see a good match between the numerical and analytical solutions for both P_1 and P_2 schemes. Concerning the P_0 scheme, we can notice a strong distortion of the sinusoidal signal with a apparent period that is shorter than the analytical one. We can conclude that the P_0 scheme does not provide accurate results with unstructured tetrahedral meshes. At long times, the agreement is still good for P_2 (thus explaining the slow convergence

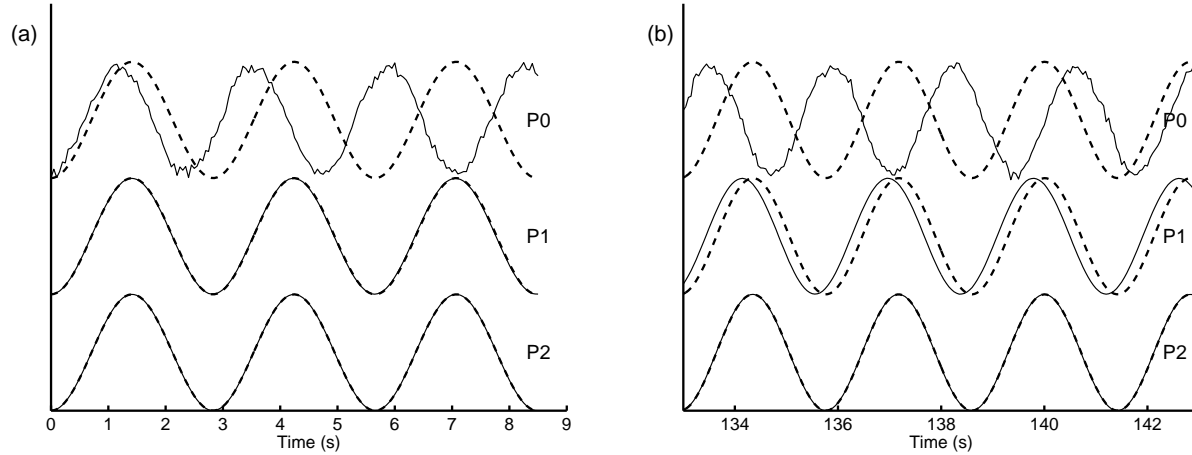


FIG. 2.19 – (a). Seismograms of velocity component v_x computed with the P_2 , P_1 and P_0 schemes for $t \in [0, 3 T]$. Continuous line, the DG-FEM solution; dashed line, the analytical solution. (b) Same as (a) for $t \in [47 T, 50 T]$.

observed when using finer meshes) but we can observe a strong delay for the P_1 scheme. The delay is reduced when using finer meshes as indicated by the convergence curve in Fig. 2.18.a. In terms of precision and efficiency, the gain from the P_2 scheme compared with the P_1 scheme can be evaluated from Fig. 2.18.b. For the same level of precision, the computation time of the P_2 modelling is nearly two orders of magnitude lower than the computation time of the P_1 modelling.

2.2.7.2 Accurate modelling of surface waves

Accurate modelling of surface wave is crucial for seismological studies, such as for the prediction of site effects or FWI of land seismic data, where the receivers are usually located on the free surface. For simple geometries, some analytical solutions exist. The propagation of waves along the surface of an elastic half space was discussed by Lamb (1904) for a force located on the surface, and an analytical solution was defined by Garvin (1956) for the buried line-source problem. Nevertheless, in the case of complex topographies, a numerical method needs to be used. For this, a method suitable for unstructured meshes has major advantages. In the following, for validation purposes, we consider a homogeneous, isotropic and purely elastic medium with a planar free surface, and we adopt the experimental set-up defined in the WP1_HHS1 test case of the SPICE test code validation project (Moczo *et al.*, 2005). The model dimensions are $20 \text{ km} \times 20$

TAB. 2.3 – Source and receiver locations for the planar free-surface modelling.

Type	X (m)	Y (m)	Z (m)
source	0	0	-693
receiver #1	0	693	0
receiver #2	0	5543	0
receiver #3	0	10932	0
receiver #4	490	490	0
receiver #5	3919	3919	0
receiver #6	7348	7348	0
receiver #7	577	384	0
receiver #8	4612	3075	0
receiver #9	8647	5764	0

km \times 10 km in the directions x , y and z , respectively. The physical properties are given by $V_P = 6000$ m/s, $V_S = 3464$ m/s and $\rho = 2700$ kg/m³. The source is a point dislocation with the only non-zero moment tensor component M_{xy} . The moment-rate time history is given by

$$M_{xy}(t) = M_0 \frac{t}{T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right),$$

with $M_0 = 10^{18}$ Nm and $T = 0.1$ s. Considering a maximum frequency of 5 Hz, the minimum wavelength is 693 m. The source and receiver locations are given in Table 2.3. The distance between the source and the receivers varies from 1 to 16 λ_{min} . We performed the computation with the mixed scheme, with P_2 elements in the medium and P_1 elements in the CPMLs. Absorbing layers were applied at all edges of the model, except at the top, where a free surface condition was used. Fig. 2.20.a and 2.20.b allow a comparison of the seismograms of the components v_x and v_z , respectively, obtained with DG-FEM and with the reflectivity method (Bouchon, 1981; Coutant, 1989). All of these seismograms were filtered between 0.13 and 5 Hz. With an average mesh spacing of 3 elements per wavelength, a good match is seen between the analytical and numerical solutions for all of the traces. Exceptions are found for the component v_z in traces #1, 2 and 3, where the DG-FEM fails to reproduce strictly null signals, but exhibits weak residuals. These residuals might be due to the spatial support of the source, which does not coincide with a pure Dirac in space, as depicted in Fig. 2.11.c.

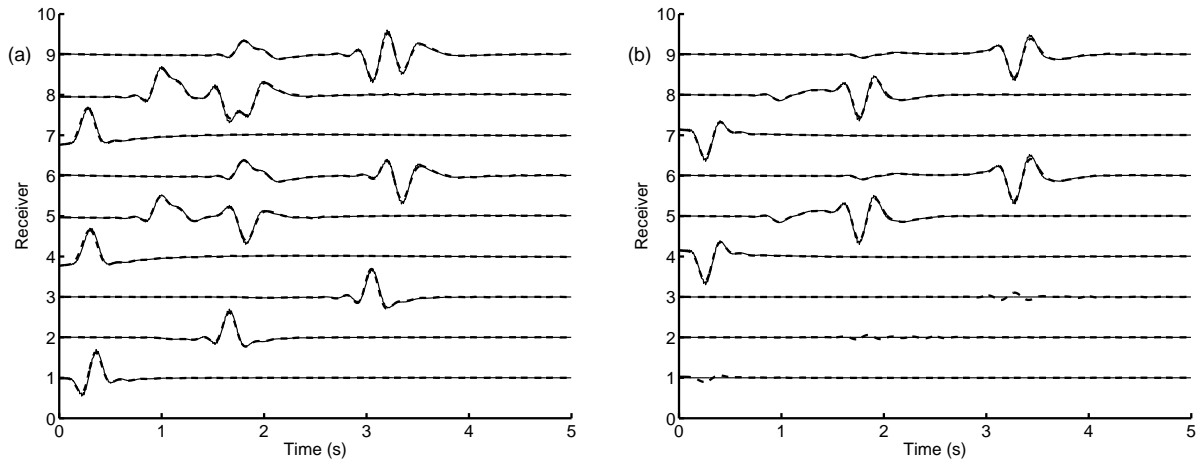


FIG. 2.20 – (a) Seismograms of the velocity component v_x computed for the planar free-surface modelling of the SPICE test code validation project. Continuous line, the analytical solution provided by the reflectivity method ; dashed line, the DG-FEM solution. (b) Same as (a) with the component v_z .

2.2.8 *hp*-adaptivity

2.2.8.1 Two-step refinement approach

One of the most interesting aspects of the DG-FEM is the possibility to mix approximation orders without any special efforts. This feature relies on the local support of the basis functions, which are discontinuous between the elements, as was introduced in section 2.2.4, and is referred to as p -adaptivity. When combined with mesh refinement, this method becomes hp -adaptive. As in the initial study of Babuska & Suri (1990), hp -adaptive FEMs associated with *a-posteriori* error estimates have gained a lot of interest due to the exponential rates of convergence seen with the correct combination of h - and p -refinements. In the present study, we propose to define a simple *a-priori* error estimate to predict the required approximation order for each element. Our approach is based on two major steps. The first refers to the mesh construction, with the intention to build a tetrahedral mesh that is locally adapted to the media properties. Initially, a mesh is generated that roughly satisfies the discretisation required by the target approximation order. At the very beginning of the procedure, the mesh can even be regular. Afterwards, the elements are checked against the physical properties of the medium, and the list of elements that need to be refined is used for the next iteration. The process is repeated until the list of elements to refine is empty. We used to build and

refine our meshes with the tool TETGEN (Si & Gärtner, 2005) which allows to specify for each element the maximum authorized volume. To compute the optimal volume for each element, we usually define a maximum ratio between the insphere radius and the wavelength and then we evaluate the corresponding volume of an equilateral tetrahedron. Given the complexity of the medium to be discretised, tetrahedral mesh generators can produce ill-shaped tetrahedra even if quality criteria are used. A common practice is to limit the aspect ratio, which is defined by the ratio between the maximum side length and the minimum height of the elements. Nevertheless, despite robust algorithms, like the Delaunay refinement algorithm of Shewchuk (1998), some almost flat elements can be present at the end of the refinement process, which are known as slivers. Besides these slivers, another critical phenomenon can occur where there are abrupt contrasts in the physical properties. In these situations, the refinement algorithm might not be able to perform the optimal discretisation. This occurs when the size of the elements cannot vary as fast as the medium properties for geometrical reasons. In that case, some elements are necessarily undersized. Consequently, the construction of an ideal mesh is a difficult task, and a large range of element sizes is often seen in constrained meshes. To mitigate the negative effects of the badly sized elements, we propose to downgrade these elements with lower approximation orders. This is done in the second step of our refinement approach, which is devoted to the p -adaptivity.

2.2.8.2 Numerical results

Our intention here, is to illustrate the benefits of the p -adaptivity. For that purpose, we consider the case of the eigenmode propagation in the unit cube presented in section 2.2.7.1 and introduce a refined area in meshes #1, 2 and 3 in order to create artificially a large range of element sizes. We obtain the new meshes #1', 2' and 3' by defining a cubic zone of size $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ in the middle of the model where the average edge length is ten times smaller than h , the average edge length in the surrounding mesh. The characteristics of the meshes can be found in Table 2.4. The ratio between the maximum and minimum insphere radius have been significantly increased compared to the uniform meshes used previously (compare with Table 2.2). The cross section of the mesh #3' in Fig. 2.21.a. allows to see the refined area in the center of the model. For the p -adaptivity, we adopted the following criteria : if the insphere radius is comprised between $h/30$ and $h/10$, the approximation order is downgraded to P_1 , and if the radius is smaller than $h/30$, the approximation order is downgraded to P_0 . This strategy is depicted in Fig. 2.22, where for each approximation order, the time step evaluated with

MÉTHODE PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS AVEC MAILLAGES TÉTRAÉDRIQUES

TAB. 2.4 – Minimum and maximum insphere radius and number of elements of the unstructured tetrahedral meshes with a refined area

Mesh	1'	2'	3'
Min. insphere radius (m)	0.0017	0.0010	0.0007
Max. insphere radius (m)	0.0425	0.0292	0.0198
Number of elements	6952	26374	82668

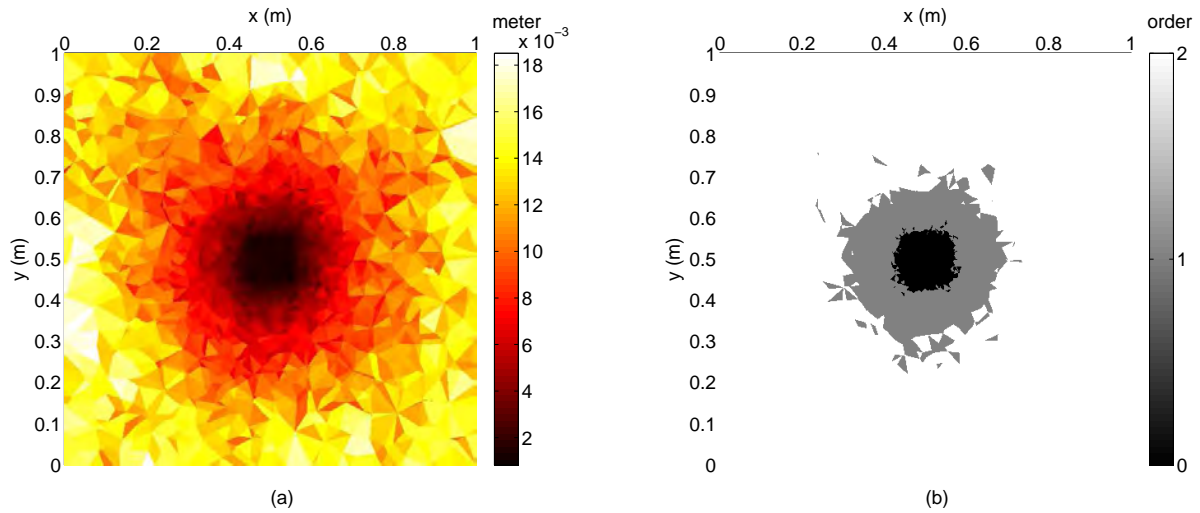


FIG. 2.21 – (a) View of the mesh in the xy plane at $z = 0.5$ m, showing the size of the elements (insphere radius) in the mesh #3'. (b) Same as (a) with the approximation order associated with each element. White, P_2 elements; grey, P_1 elements; black, P_0 elements.

eq. (2.15) *versus* the insphere radius of one single equilateral tetrahedron is shown. When applying these criteria, the time step does not decrease uniformly according to the size of the element. Instead, two jumps (Fig. 2.22, dashed line) allow the time step to increase despite the reduction in the element size. These jumps are due to the decrease in the approximation order from P_2 to P_1 , and from P_1 to P_0 . According to the adopted criteria, we obtain the distribution of approximation orders indicated in Table 2.5. The number of downgraded elements is quite important and represent for all meshes approximatively 60 %. Nevertheless, the downgraded elements are mostly located in the vicinity of the refined area as shown in Fig. 2.21.b and represent in average only 3 % of the volume of the model. Moreover, despite the fact that the P_0 scheme does not provide accurate results, the introduction of such elements allows a drastic increase of the time step by a

TAB. 2.5 – Number of elements per approximation orders and time steps for the complete P_2 and the p -adaptive modelling

	Nb P_0 elem.	Nb P_1 elem.	Nb P_2 elem.	Time step
Full P_2 scheme with mesh 1'	0	0	6952	0.0006745
p -adaptive scheme with mesh 1'	2520	1606	2826	0.0033372
Full P_2 scheme with mesh 2'	0	0	26374	0.0004187
p -adaptive scheme with mesh 2'	10883	5849	9642	0.0020934
Full P_2 scheme with mesh 3'	0	0	82668	0.0002737
p -adaptive scheme with mesh 3'	34176	17483	31009	0.0013687

factor of five. The impact of the downgraded elements can be analysed with Fig. 2.23.a showing the normalised RMS error between the analytical, the P_2 and the p -adaptive numerical solutions at $t = 50T$. Actually, the p -adaptive scheme exhibits an error which is comparable to the complete P_2 modelling except for the mesh #3', where we observe a particular behavior of the P_2 scheme with an increase of the error despite the mesh spacing has been reduced. This indicates that a large distribution of element sizes has an effect on the convergence on the P_2 scheme. On the contrary, the p -adaptive scheme seems less sensitive and preserves the second-order convergence. From a computational point of view, the benefit of the approach appears in Fig. 2.23.b where the error is represented *versus* the computation time. For the same computation time, the p -adaptive approach shows a better misfit than the full P_2 modelling, as indicated by the position of the p -adaptive curve at the left of the P_2 curve. The hp -refinement provided by DG-FEM is particularly interesting in the case of complex refined meshes where small elements are generally produced by tetrahedral mesh generators. The efficiency of our approach in such cases is illustrated in the next section.

2.2.9 Application to complex medium

We here demonstrate the potential of DG-FEM with hp -adaptivity in a challenging seismological model, where the computation of the surface waves is critical for the prediction of site effects. These phenomena arise when the ground motion caused by an earthquake is amplified by geological structures. Site effects can be related to a sedimentary basin, like for the great earthquake in Mexico in 1985 (Campillo *et al.*, 1989; Kawase, 2003). The importance of site effects and their study were the main motivation

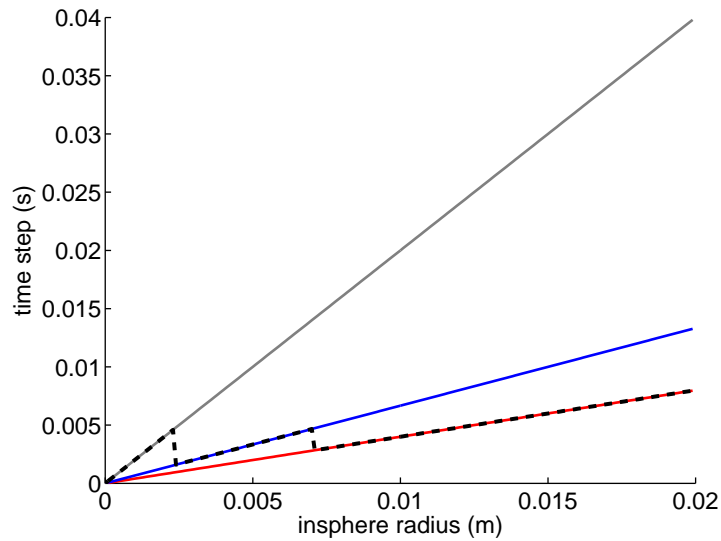


FIG. 2.22 – Time step *versus* the insphere radius of one single equilateral tetrahedron computed with eq. (2.15), for different approximation orders. Grey curve, P_0 ; blue curve, P_1 ; red curve, P_2 ; dashed line, the p -adaptive approach used for mesh #3'.

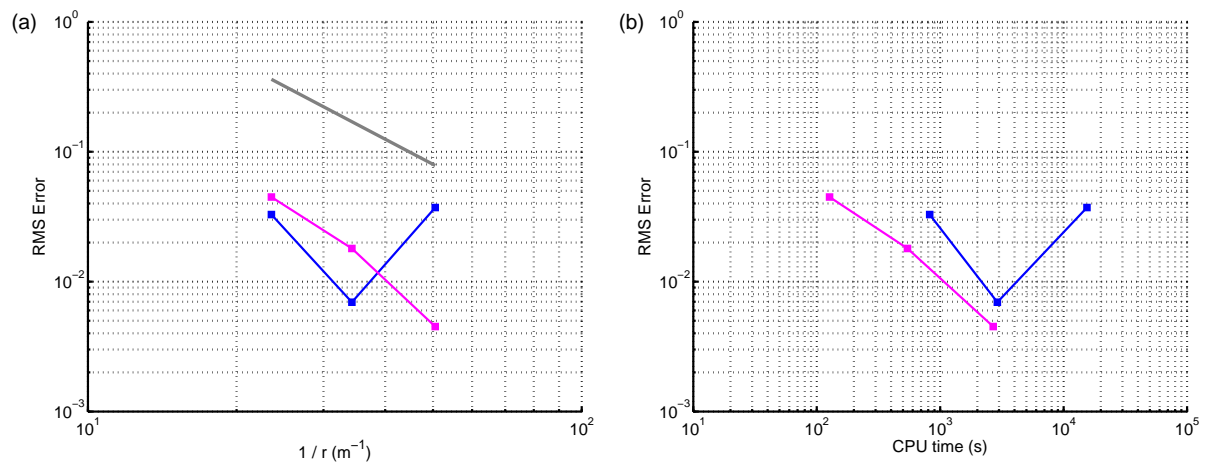


FIG. 2.23 – (a) Root mean square error between the analytical and numerical solutions *versus* the inverse of the maximum insphere radius r at $t = 50 T$. Blue line, the error against the P_2 solution; pink line, the error against the p -adaptive solution; grey curve, second-order slope. (b) Same as (a) except the root mean square error is plotted *versus* the elapsed computation time. The tests have been performed with 32 CPUs on a computing platform with bi-processor quad core Opteron 2.3 GHz CPUs interconnected with Infiniband at 20 Gb/s

for setting-up worldwide test sites. Here, we consider the EUROSEISTEST verification and validation project (Chaljub *et al.*, 2009), and address the issue of modelling the ground motion in a basin structure. We compare the results obtained with our method against results computed with SEM.

2.2.9.1 Description of EUROSEISTEST verification and validation project

The EUROSEISTEST verification and validation project refers to the geological structure of the Mygdonian sedimentary basin about 30 km E-NE of the city of Thessaloniki (northern Greece). It mainly consists of a sedimentary basin with extreme low velocities and a high Poisson ratio, embedded in high velocity bedrock. The velocity structure of the area is well known along the central section *AB* (Fig. 2.24.b), following a large number of geophysical and geotechnical measurements (Jongmans *et al.*, 1998), surface and borehole seismic prospecting, and electrical soundings and microtremor recordings. The 3D structure in the whole graben was then extrapolated from this central profile, taking into account information from many single-point microtremor measurements, some array microtremor recordings, one EW refraction profile, and old deep boreholes drilled for water-exploration purposes (Raptakis *et al.*, 2005; Manakou *et al.*, 2007). The sediment thickness indeed increases both to the West and the East of the central profile, which corresponds to a buried pass between two thicker sub-basins. For the verification part of the EUROSEISTEST project, a smooth vertical gradient without any lateral variation was considered. Inside the basin, the velocities vary with the depth as follows

$$\begin{aligned} V_P &= 1000 + 100\sqrt{d} \\ V_S &= 200 + 32\sqrt{d}, \end{aligned}$$

where V_P and V_S are expressed in m/s, and d is the depth in m. Table 2.6 summarises the properties of the EUROSEISTEST model. The ratio between the maximum and minimum S-wave velocities is 17.2. This high factor favours the use of unstructured meshes, as a large range of different element sizes is expected. Indeed, small elements are required in the basin area while larger ones can be used in the bedrock. The size of the model is 16 km \times 15 km \times 8 km in the directions x, y and z , respectively. M-CPMLs of 2 km width are applied at all edges of the model, except at the top, where a free surface condition is used. The model topography is flat. Fig. 2.24.a and 2.24.b show the P-wave and S-wave velocities, respectively, on the free surface in the xy plane. In these

TAB. 2.6 – The properties of the geological structures of the EUROSEISTEST model.

	P-wave velocity	S-wave velocity	Density
Basin	1000 to 3027 m/s	200 to 848 m/s	2100 kg/m ³
Bedrock	4500 to 6144 m/s	2600 to 3444 m/s	2600 to 2755 kg/m ³

	Ratio V_P / V_S	Max. depth
Basin	5.00 to 3.57	411 m
Bedrock	1.73 to 1.78	8 km

figures, the complex shape of the basin and the abrupt contrast of velocity at the basin border can be seen. The source is located 5 km below the basin, and it acts as a double-couple mechanism that represents a small earthquake with a corner frequency of 4 Hz (Fig. 2.25). The epicentre is indicated with a yellow star in Fig. 2.24.a. The minimum propagated wavelength is 50 m, and the largest dimension of the model is 320λ . We considered seven receivers, as marked with numbered green triangles in Fig. 2.24.a, at strategic positions of the true EUROSEISTEST array. All of these receivers lie on the free surface, except receiver #7, which is buried at 197 m depth just above the source. Receivers #1 and #4 are located on the bedrock, and the others are located within the basin area.

2.2.9.2 Numerical results

For the SEM calculations, the size of the computational domain was $16.14 \text{ km} \times 29.31 \text{ km} \times 7.86 \text{ km}$, and local absorbing boundary conditions were imposed at the lateral and bottom boundaries, following Komatitsch & Vilotte (1998). The mesh is based on a conforming layer-cake topology (Komatitsch *et al.*, 2004) where the elements are deformed to follow the sediment-bedrock interface, except for depths shallower than a threshold value, which was set to 80 m for the basin. For the elements close to the valley edges, the sediment-bedrock discontinuity is approximated by assigning different material values to the collocation points inside the elements. Note that because of the large P-wave velocity in the shallow bedrock, the choice of the threshold depth directly controls the time step authorised by the CFL stability condition, and therefore the total CPU time of the simulation.

For the DG-FEM calculations, the size of the numerical model was $20.14 \text{ km} \times 19 \text{ km} \times 8 \text{ km}$ in the directions x, y and z , respectively, including M-CPMLs of 2 km width

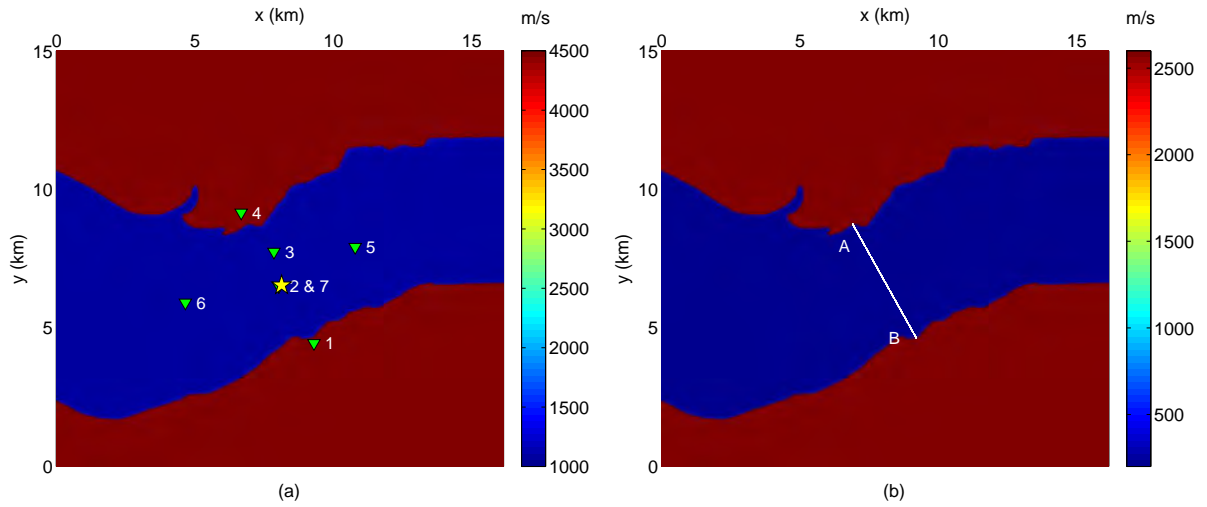


FIG. 2.24 – (a) View of the mesh in the xy plane at $z = 0$ m, showing the P-wave velocity associated with each element in the EUROSEISTEST model. Numbered green triangles, the receivers ; yellow star, source epicentre. (b) Same with the S-wave velocity associated with each element. The position of the cross-section AB is indicated by the white line.

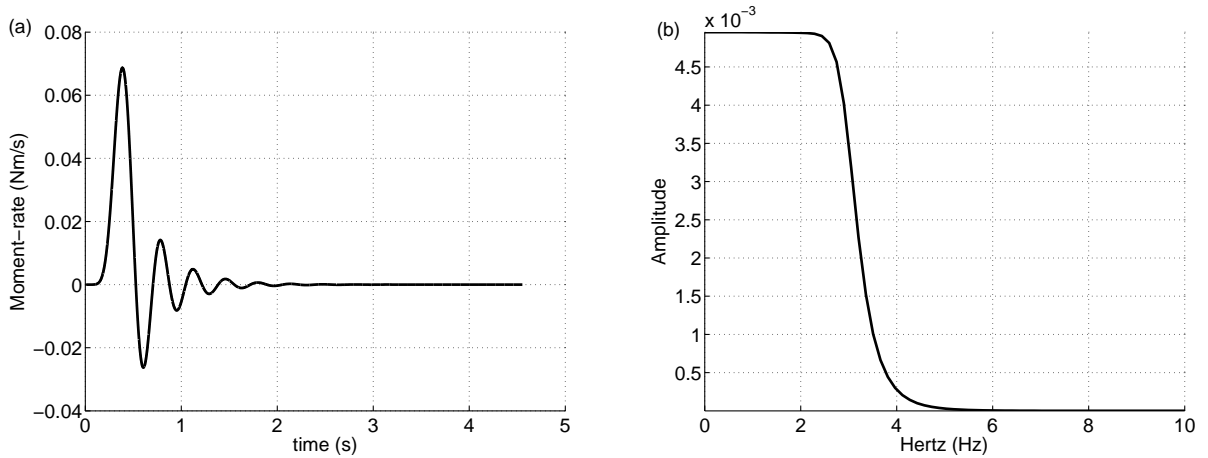


FIG. 2.25 – (a) Moment-rate function of the source used for the EUROSEISTEST modelling. (b) Amplitude spectrum of the source.

at all edges of the model, except at the top, where a free-surface condition was used. We adopted the two-step refinement approach explained in the previous section. In the first step, we built an *ad-hoc* tetrahedral mesh with TETGEN. A total of six mesh refinement iterations were required to reach an adaptive discretisation of 3 elements per λ_S . Fig.

2.26.a, 2.26.b and 2.26.c show the distribution of the S-wave velocity in the cross-section AB for the first, second and last iterations of the h -refinement process, respectively. Due to the extremely low velocities in the basin, the automatic refinement process produced very small elements, which resulted in a fine and regular discretisation of the basin shape. Fig. 2.27.a shows the size of the elements (insphere radius) on the free surface. As expected, smaller elements are found in the basin area rather than in the bedrock. In this example, we have taken advantage of the tetrahedral mesh refinement. Indeed, the volume of the basin represents 0.8% of the complete volume of the model and it contains 72% of the total number of mesh elements. In the second step, we made use of p -adaptivity to reduce the number of time steps. We adopted the following criteria : if the insphere radius is between $\lambda_S/120$ and $\lambda_S/40$, the approximation order is downgraded to P_1 , and if the insphere radius is smaller than $\lambda_S/120$, the approximation is downgraded to P_0 . While most of the tetrahedral elements are adequate for P_2 , the badly sized elements are computed with lower approximation orders. We end up with a mesh that contains in total 16.3 million elements and 131.0 million DOF. The approximation orders are distributed as follows : 67.04% P_2 elements, 32.67% P_1 elements (with 28.66% elements in the M-CPMLs), and 0.29% P_0 elements. This strategy is shown in Fig. 2.27.b, where the approximation order is shown for each element located on the free surface. Almost all of the elements are P_2 elements, except for those with inappropriate sizes, which are downgraded to P_1 or to P_0 in the worst cases. Indeed, the contact between the basin and the bedrock produces a high velocity contrast that is not ideally accommodated by the tetrahedra. Therefore, some elements located in the bedrock have smaller sizes than expected, and thus can be treated with lower approximation orders. These latter are particularly visible in Fig. 2.27.b. Some P_1 elements also appear at the border in Fig. 2.27.b where the M-CPMLs start.

The seismograms of the components v_x and v_z computed with DG-FEM and with SEM are shown in Fig. 2.28.a and 2.28.b, respectively. The fit between the DG-FEM and SEM solutions is almost perfect for the vertical component v_z , whatever the position of the receivers, and even at long times. On the other hand, for the horizontal component v_x , good agreement is seen for short times, of up to 6-7 s. At later times, some amplitude misfits are seen. Nevertheless, for all of the traces, the overall fit of the waveforms between the two solutions is remarkable, which indicates that the same and complex wave propagation phenomena are represented. Contrary to the SEM, for the DG-FEM, constant physical properties per element were assumed, given by the average of the properties at the four vertices of the elements. Therefore, the amplitude misfits

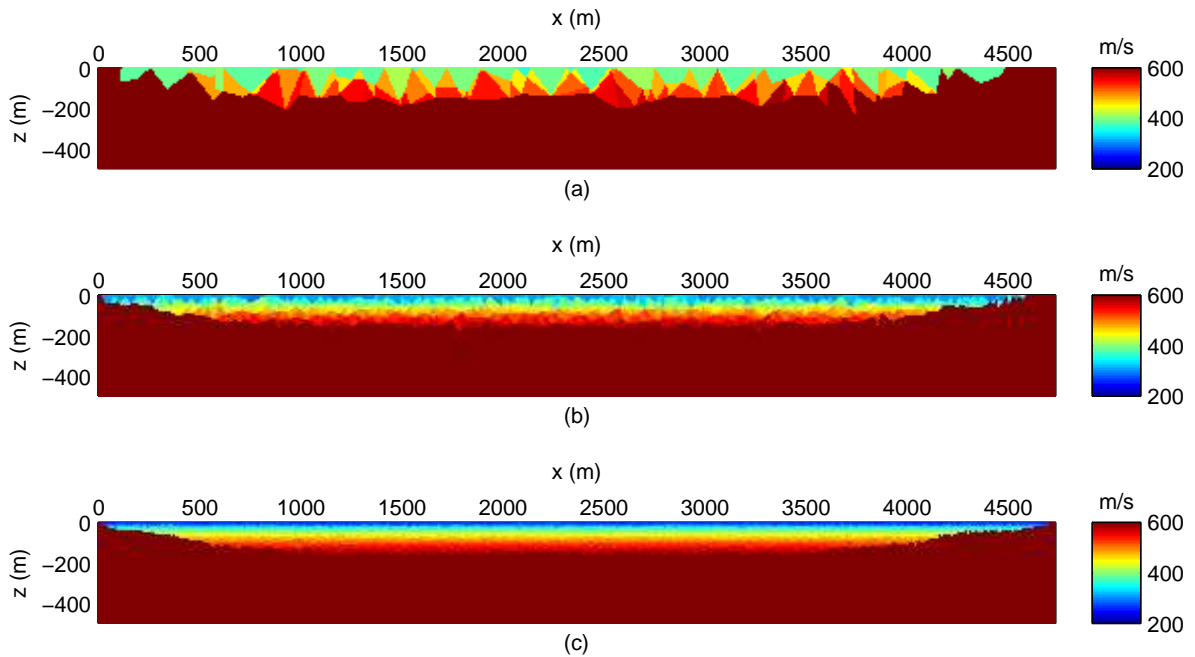


FIG. 2.26 – (a) Cross-section AB of the mesh at the first iteration of the h -refinement showing the S-wave velocity associated with each element in the EUROSEISTEST model. (b) Same as (a) at the second iteration of the h -refinement. (c) Same as (a) at the sixth and last iteration of the h -refinement.

seen in the DG-FEM seismograms might be the consequence of the approximations used in the model discretisation, rather than the accuracy of the numerical method itself.

The statistics related to the DG-FEM and SEM modelling are given in Table 2.7. Compared to DG-FEM, the number of DOF used in the SEM modelling is 30% lower, and the number of time steps is nearly two-fold lower. Both of the simulations were performed on the same computing platform with 18 bi-xeon Quadcore CPU IBM E5420 at 2.5 GHz (giving a total of 144 cores). The methods required similar amounts of memory, and to obtain 30 s of wave propagation, the computation time was 7 h with SEM and 52 h with DG-FEM. The computation time per DOF and per step is on average $1.67 \mu\text{s}$ for DG-FEM, and $0.52 \mu\text{s}$ for SEM. Taking into account that the number of unknowns per DOF is nine with DG-FEM (with first-order velocity-stress formulation) and three with SEM (with second-order velocity formulation), these two methods yield comparable computation times per unknown. Therefore, the relative cost of the methods depends mainly on the mesh characteristics. However, a detailed analysis is required and goes beyond the scope of this study. We can expect, that in more complicated cases (like a

MÉTHODE PAR ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS AVEC MAILLAGES TÉTRAÉDRIQUES

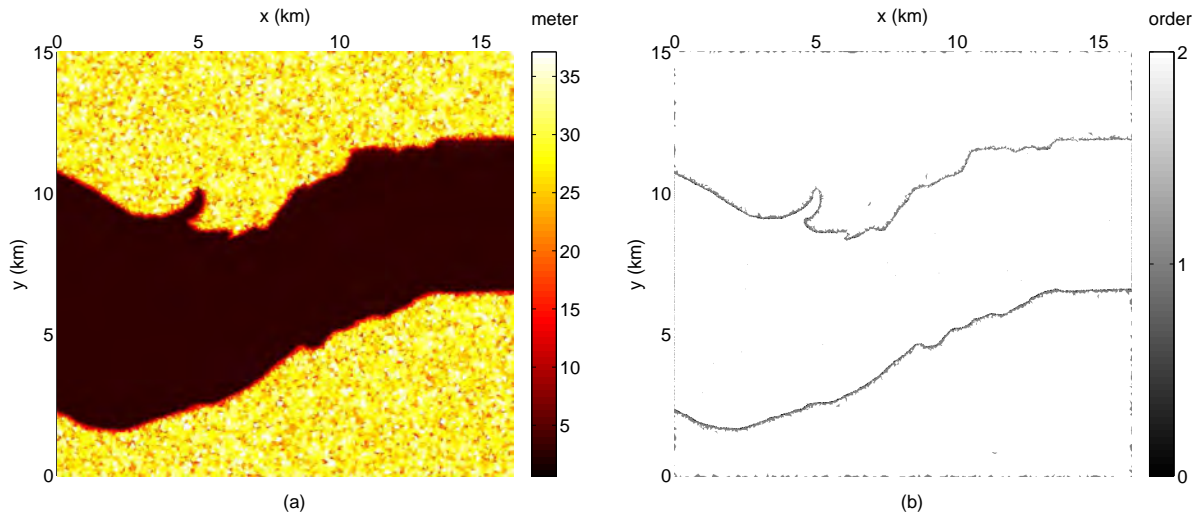


FIG. 2.27 – (a) View of the mesh in the xy plane at $z = 0$ m, showing the size of the elements (insphere radius) in the EUROSEISTEST model. (b) Same as (a) with the approximation order associated with each element. White, P_2 elements; grey, P_1 elements; black, P_0 elements.

set of thin geological layers), the DG-FEM would be more efficient, due to the flexibility of tetrahedral meshes.

In the following, we present another comparison tool that allows for a study of the misfits on the complete free surface of the model. An objective in earthquake engineering is to predict the ground motion for a realistic scenario. The map of peak ground velocity (PGV) provides a convenient representation that shows the maximum value of the norm of the velocity vector for each position on the free surface. PGV maps computed with 30 s of seismic signals are shown in Fig. 2.29. The fit between the PGV map computed with DG-FEM and the PGV map computed with SEM is almost perfect. On these maps, the paths followed by energetic bundles of surface waves can be seen. When they reach the basin borders, these bundles are reflected and diffracted. This behaviour can be seen in the PGV map in the south-east part of the basin.

2.2.10 Perspectives and conclusions

We have proposed a DG-FEM with CPML absorbing boundary condition that benefits most from hp -adaptivity combined with tetrahedral meshes. The gain obtained with this method in the context of 3D seismic elastic modelling is important when complex

TAB. 2.7 – Mesh statistics, computation time and memory allocation relative to the EUROSEISTEST modelling: the DG-FEM and SEM computations were both performed with 18 bi-xeon Quadcore CPU IBM E5420 at 2.5 GHz (making a total of 144 cores).

Method	Order	min. edge	max. edge	Nb elem.	Nb DOF	Nb steps	Nb CPUs
DG-FEM	$P_2/P_1/P_0$	2.5 m	399.8 m	16.3×10^6	131.0×10^6	122 565	144
SEM	P_4	20.0 m	906.0 m	1.4×10^6	91.7×10^6	75 000	144

Elapse time	Memory
52 hours	~ 26 GB
7 hours	~ 25 GB

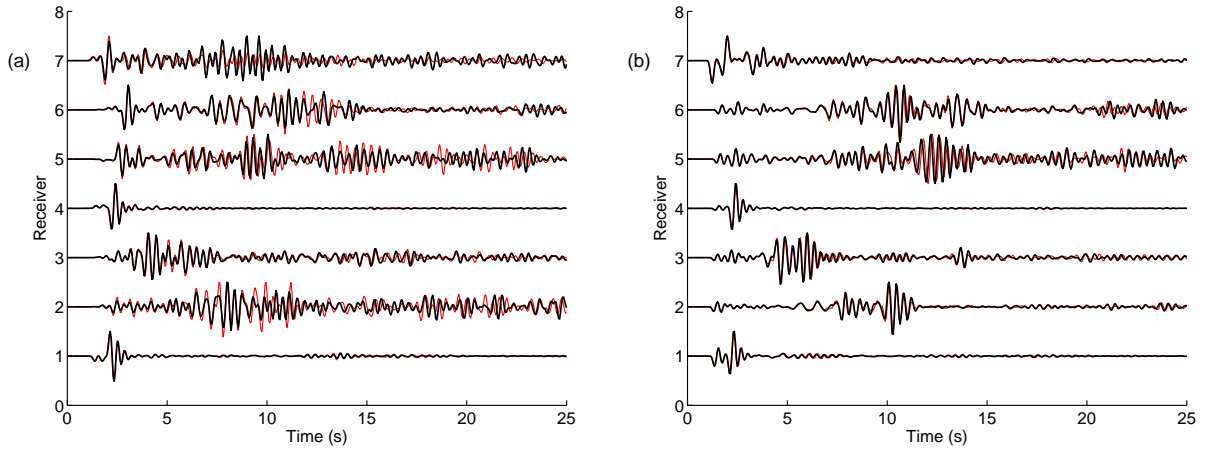


FIG. 2.28 – (a) Seismograms of the component v_x computed in the EUROSEISTEST model. Black line, with DG-FEM ; red line, with SEM. (b) Same as (a) with the component v_z .

geological structures are considered, especially if the medium has highly contrasting physical properties. In our approach, we favour the use of low approximation orders which allows fine discretisation of the medium with piece-wise constant properties per element. From this point of view, an optimal compromise between precision, computational cost and adequate discretisation is achieved with the P_2 interpolation. For efficient reduction of the computation time, CPMLs were designed with lower approximation orders and they allowed a saving of between 40% and 60% of CPU time on large clusters. Moreover, we mitigated the effects of ill-sized tetrahedral elements by automatically choosing the appropriate approximation order for each element, and hence we have kept the number

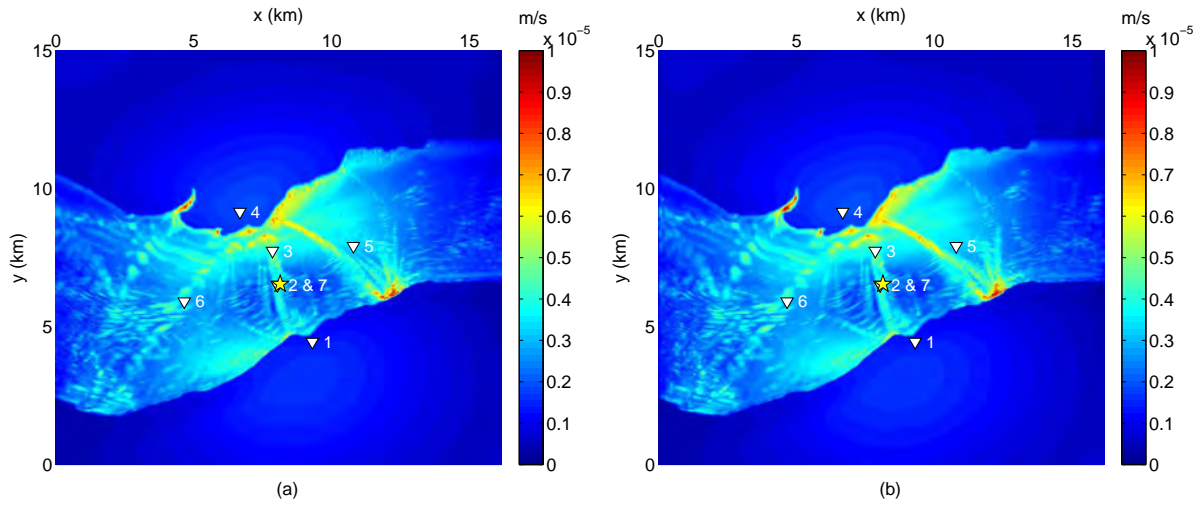


FIG. 2.29 – (a) Peak ground velocity map computed for the EUROSEISTEST modelling with DG-FEM. Numbered white triangles, the receivers ; yellow star, the source epicentre. (b) Same as (a) computed with SEM.

of time steps as low as possible. In our case, the so-called p -adaptivity technique can reduce the number of time steps by a factor of five. Consequently, when combined with the low-cost CPMLs, computation times are generally reduced by nearly one order of magnitude, compared with the times observed with standard DG-FEM modelling using a unique approximation order.

The potential and the perspectives concerning this method are numerous. For the limitations of our formulation, we note the possibility of attributing varying physical properties inside the elements. This would release the discretisation constraint and would allow the use of higher approximation orders, thus reducing the number of elements and the computational cost of the simulations. For completeness, we note another possible means of releasing the discretisation constraint, with non-conforming meshing, although the expected gain does not appear as crucial in the case of tetrahedral meshes as it is with hexahedral meshes. Apart from these possible evolutions, we intend to include visco-elastic rheologies (Käser *et al.*, 2007) and to apply the method to realistic problems requiring appropriate discretisations of geological structures and/or large material contrasts. Due to the discontinuous nature of the method, rupture mechanisms, like earthquake dynamic rupture, might be modelled (BenJemaa *et al.*, 2007, 2009; de la Puente *et al.*, 2009). This method can also be applied to seismic modelling in cases of complex topographies, or be used as a forward modelling tool for FWI techniques (Tarantola,

1987; Pratt *et al.*, 1998).

acknowledgments

This study was funded by the SEISCOPE consortium, which is sponsored by BP, CGG-VERITAS, EXXON MOBIL, SHELL and TOTAL. It has also benefited from the support of the CEA/CASHIMA project. All of the numerical simulations were performed on the high performance computing facilities of IDRIS/CNRS (Project # 92280) and the Observatoire de la Côte d'Azur (OCA), except the EUROSEISTEST ground predictions which were performed at the *Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble* (SCCI-CIMENT). We would like to thank Romain Brossier and Stéphane Operto for the fruitful discussions. The remarks and suggestions of Martin Käser and an anonymous reviewer are greatly acknowledged as well.

2.2.11 Lagrangian basis functions

For the definition of the Lagrangian basis functions, the barycentric or tetrahedral coordinates $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ that are linked to the cartesian coordinates (x, y, z) are defined inside an element as follows

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix},$$

where (x_j, y_j, z_j) are the coordinates of the j -th node of the element. Then, the Lagrangian basis functions can be defined with a linear combination of the tetrahedral coordinates depending on the approximation order. Following the node numbering convention given in Fig. 2.9, these functions are given by :

for the P_0 interpolation :

$$\varphi_1 = 1,$$

for the P_1 interpolation :

$$\varphi_1 = \zeta_1 \quad \varphi_2 = \zeta_2 \quad \varphi_3 = \zeta_3 \quad \varphi_4 = \zeta_4,$$

and for the P_2 interpolation :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (2\zeta_1 - 1)\zeta_1 & \varphi_2 &= (2\zeta_2 - 1)\zeta_2 & \varphi_3 &= (2\zeta_3 - 1)\zeta_3 & \varphi_4 &= (2\zeta_4 - 1)\zeta_4 \\ \varphi_5 &= 4\zeta_1\zeta_2 & \varphi_6 &= 4\zeta_1\zeta_3 & \varphi_7 &= 4\zeta_1\zeta_4 & \varphi_8 &= 4\zeta_3\zeta_2 & \varphi_9 &= 4\zeta_3\zeta_4 & \varphi_{10} &= 4\zeta_2\zeta_4. \end{aligned}$$

2.2.12 Matrices used in the DG-FEM formulation

\mathcal{M}_θ and \mathcal{N}_θ are constant real matrices defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ \mathcal{M}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ \mathcal{M}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{N}_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

For P_k , with $k \leq 2$, the volume integral in eq. (2.9) and (2.10) can be computed with the 11 Gauss points integration rule for tetrahedra (Keast, 1986) and the surface integral in eq. (2.11) and (2.12) can be computed with the six Gauss points integration rule for triangles (Dunavant, 1985). Below, we give the expression of the matrices relevant for P_1 elements following the node numbering convention given in Fig. 2.9.b.

$$\mathcal{K}_i = \frac{vol_i}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

with vol_i as the volume of element i .

$$\mathcal{E}_{i\theta} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} S_{i1}n_{i1_\theta} & S_{i1}n_{i1_\theta} & S_{i1}n_{i1_\theta} & S_{i1}n_{i1_\theta} \\ S_{i2}n_{i2_\theta} & S_{i2}n_{i2_\theta} & S_{i2}n_{i2_\theta} & S_{i2}n_{i2_\theta} \\ S_{i3}n_{i3_\theta} & S_{i3}n_{i3_\theta} & S_{i3}n_{i3_\theta} & S_{i3}n_{i3_\theta} \\ S_{i4}n_{i4_\theta} & S_{i4}n_{i4_\theta} & S_{i4}n_{i4_\theta} & S_{i4}n_{i4_\theta} \end{pmatrix} \quad \forall \theta \in \{x, y, z\}, \quad (2.31)$$

with S_{ik} the surface of the face opposite to the k -th node of element i and $\vec{n}_{ik} = (n_{ik_x}, n_{ik_y}, n_{ik_z})^T$ as the outward pointing unit normal vector with respect to the surface S_{ik} . For the computation of the flux matrices, we adopt a specific node numbering scheme. First, the neighbour element k is given by the node number of element i which is not shared between elements i and k . For instance, in Fig. 2.9.b, the neighbour element $k = 1$ is the element sharing the face (234) of element i . Second, the neighbour element nodes share the same node numbers of element i on the common face. Therefore, the opposite nodes of element i and k have also the same number. With this node numbering scheme, \mathcal{F}_{ik} and \mathcal{G}_{ik} are identical when both elements are P_1 . We use this property to perform an efficient computation of the flux. In that case, we get

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i1} &= \frac{S_{i1}}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \mathcal{F}_{i2} &= \frac{S_{i2}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_{i3} &= \frac{S_{i3}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \mathcal{F}_{i4} &= \frac{S_{i4}}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Chapitre 3

Applications de la méthode par éléments finis discontinus

Sommaire

3.1	Le projet E-2VP	124
3.1.1	Cadre du projet	124
3.1.2	Description des modèles	124
3.1.3	Construction des maillages	127
3.1.4	Résultats numériques	127
3.2	Le massif de Rustrel	144
3.2.1	Description du modèle	144
3.2.2	Objectifs de la modélisation	144
3.2.3	Construction du maillage	146
3.2.4	Résultats numériques	147
3.3	Le volcan de la Soufrière	150
3.3.1	Un volcan actif	150
3.3.2	Objectifs de la modélisation	151
3.3.3	Construction du modèle	152
3.3.4	Construction du maillage	154
3.3.5	Résultats numériques	155

3.1 Le projet E-2VP

3.1.1 Cadre du projet

Le projet "EUROSEISTEST Verification and Validation Project" (E-2VP) (Chalub *et al.*, 2010; Moczo *et al.*, 2010a) a pour objectif la comparaison des outils et des méthodes numériques de modélisation de propagation d'ondes sismiques. Ce projet est co-organisé par : le CEA, l'Institut Laue Langevin, le laboratoire LGIT de Grenoble et l'Université de Thessalonique. Le cadre d'étude est le bassin de Volvi situé dans la région de Thessalonique (Grèce). La comparaison des méthodes numériques entre-elles correspond au volet vérification du projet et la comparaison des résultats numériques avec les données enregistrées correspond à la partie validation du projet. Dans ce travail, nous présentons seulement les résultats obtenus dans le volet vérification. Nous tentons à travers ces résultats de positionner notre approche vis-à-vis des autres méthodes numériques et d'analyser la pertinence des choix que nous avons faits, comme l'approximation des propriétés physiques de manière constante par élément. Dans le but d'obtenir des modélisations aussi précises que possible, d'autres facteurs doivent être également évalués : la condition explicite de surface libre, les conditions absorbantes ou encore l'impact de la discrétisation sur la dispersion numérique. Dans ce but, le projet E-2VP, a permis de confronter une variété de méthodes numériques et ainsi de développer le savoir-faire et d'améliorer les outils existants. Le tableau 3.1 donne la liste des participants au projet. La méthode la plus représentée est celle des éléments finis avec 5 contributions (1 formulation standard, 2 ES et 2 formulations discontinues). L'approche par différences finies est employées par 3 équipes. Enfin, la méthode par éléments discrets et la méthode pseudo-spectrale sont également présentes.

3.1.2 Description des modèles

On a considéré 3 modèles qui se différencient seulement par la distribution des propriétés au sein du bassin :

- Modèle A : le bassin est composé de 3 couches aux propriétés homogènes (figure 3.1).

TAB. 3.1 – Les participants et les méthodes numériques utilisées dans le projet E-2VP.

Identifiant équipe	Méthode	Institut	Ville	Pays
3D01	DF	Comenius Univ. Bratislava	Bratislava	Slovaquie
3D02	ES	Université Joseph Fourier	Grenoble	France
3D03	DF	Disaster Prevention Res. Inst.	Kyoto	Japon
3D04	PS	Istituto Nazionale di Oceanografia e Geofisica Sperimentale	Trieste	Italie
3D05	DF	National Res. Inst. for Earth Science and Disaster Prevention	Tsukuba	Japon
3D06	ED	Commissariat à l’Energie Atomique	Bruyères le Chatel	France
3D07	EF	Carnegie Mellon University	Pittsburgh	USA
3D08	ES	Politecnico di Milano	Milan	Italie
3D09	GD	Université de Nice Sophia-Antipolis	Nice	France
3D10	GD	Ludwig-Maximilians-Universität	Munich	Allemagne

- Modèle B : le bassin est décrit par un gradient de vitesse (propriétés latéralement homogènes). Il s’agit du modèle dont les résultats ont déjà été présentés au chapitre 2.2.9.
- Modèle C : les propriétés à l’intérieur du bassin sont hétérogènes dans les 3 directions de l’espace.

La figure 3.2 montre les profils des vitesses V_P et V_S dans le bassin pour les modèles A et B. Les caractéristiques principales des 3 modèles sont :

- Une vitesse V_S très faible dans le bassin (200 m/s à la surface) qui jouxte une vitesse V_S élevée dans l’encaissant (2600 m/s à la surface).
- Un coefficient de Poisson élevé dans le bassin.
- Dans l’encaissant : un gradient de vitesse fonction de la profondeur.
- Une rhéologie purement élastique (sans atténuation).
- Des structures fines (la première couche du bassin dans le modèle A représente à certains endroits quelques mètres d’épaisseur).

- Un modèle de grandes dimensions : 16 km × 15 km × 8 km.

L'ensemble des modèles possèdent une topographie plate. En effet, les études numériques ont montré que l'influence de la topographie du site était négligeable sur les résultats qui sont essentiellement dépendants de la géométrie et des propriétés physiques du bassin. En ce qui concerne la source sismique, nous avons utilisé pour toutes les modélisations la même source localisée au milieu du modèle à 5 km de profondeur (figure 2.24) et dont la fréquence maximum est 4 Hz (figure 2.25).

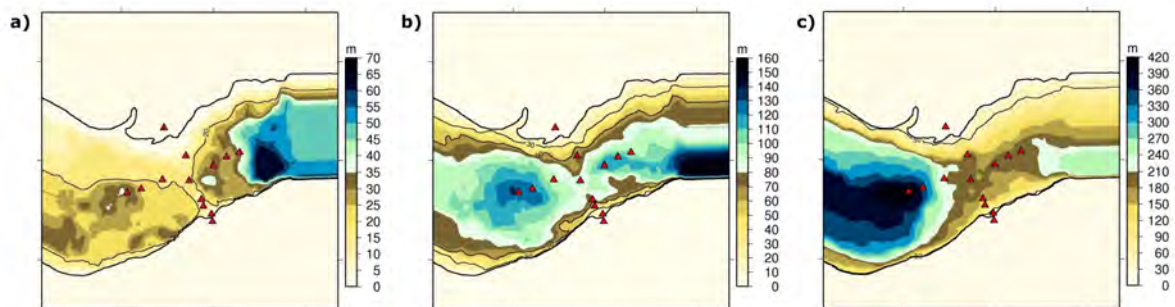


FIG. 3.1 – (a) Profondeur de la première couche dans le modèle A. (b) Idem pour la deuxième couche. (c) Idem pour la troisième couche.

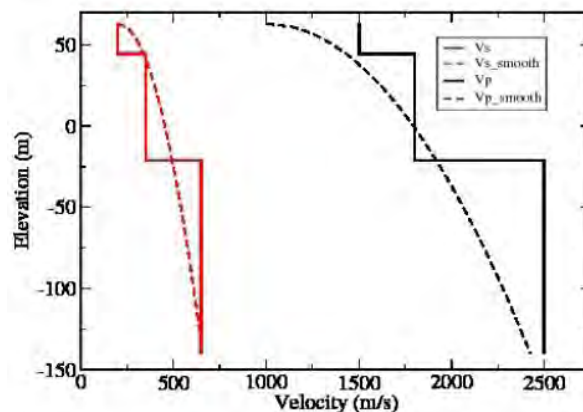


FIG. 3.2 – Profils, en fonction de la profondeur, des vitesses des ondes P (en noir) et S (en rouge) dans le bassin de Volvi pour le modèle A (lignes continues) et pour le modèle B (lignes pointillées).

3.1.3 Construction des maillages

Pour les 3 modèles, nous avons appliqué le procédé de raffinement en espace et en ordre sur les maillages tétraédriques que nous avons décrit précédemment. Par conséquent, les maillages obtenus ne respectent pas scrupuleusement les interfaces présentes dans les modèles (limite du bassin et limites des couches). Nous tenterons d'évaluer à partir des résultats numériques, les limites de cette approche. Les statistiques des maillages pour les 3 modèles sont indiquées dans le tableau 3.2. On obtient des maillages avec environ 16 millions d'éléments pour le modèle B et environ 20 millions pour les modèles A et C. On note l'importance du raffinement dans les maillages avec des rapports entre les côtés maximum et minimum des éléments autour de 150 pour les modèles B et C et jusqu'à plus de 500 pour le modèle A. Cette large variation dans la taille des éléments provient du contraste des vitesses de propagation dans les modèles qui engendre automatiquement des éléments extrêmement fins dans le bassin et des éléments de taille importante dans l'encaissant.

TAB. 3.2 – Statistiques des maillages et des calculs concernant les modélisations pour les 3 modèles du projet E-2VP. Les temps de calcul ont été mesurés sur la machine IBM BlueGene de l'IDRIS.

	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Temps de modélisation	30 s	30 s	30 s
Nb éléments	21.2 millions	16.3 millions	20.1 millions
Nb inconnues	1.53 milliards	1.18 milliards	1.49 milliards
Min/Max longueur élément	0.6 - 318 m	2.5 - 400 m	2.7 - 400 m
Nb de pas en temps	201 933	122 565	194 124
Nb CPUs	4096	4096	4096
Temps de calcul	14 h 18 min.	6 h 48 min.	13 h 48 min.
Temps / inconnue / pas en temps	0.68 μ s	0.69 μ s	0.70 μ s

3.1.4 Résultats numériques

Les modélisations représentent des problèmes numériques de plus d'un milliards d'inconnues avec un peu plus de 100 000 pas en temps pour le modèle B et environ 200 000 pas en temps pour les modèles A et C (tableau 3.2). Comparativement aux chiffres indiqués dans le chapitre 2.2.9, on constate que l'efficacité du calcul est fortement réduite

sur la machine IBM BlueGene de l’IDRIS ($0.69 \mu s$ / inconnue / pas en temps) par rapport à la machine du CIMENT de Grenoble ($0.18 \mu s$ / inconnue / pas en temps). A cela deux raisons : tout d’abord, la raison principale provient des vitesses de calcul différentes des processeurs (les processeurs de la machine BlueGene sont plus lents), et de plus, le partitionnement du modèle avec 4096 processeurs sur la machine BlueGene entraine un surcoût des communications par rapport au partitionnement avec 144 processeurs sur la machine du CIMENT.

Afin de comparer les résultats numériques, le critère de Kristeková *et al.* (2006) a été employé. Ce critère permet de séparer les erreurs de phase et d’amplitude et en outre, permet d’attribuer un niveau de confiance entre deux solutions selon le barème donné dans la figure 3.3.

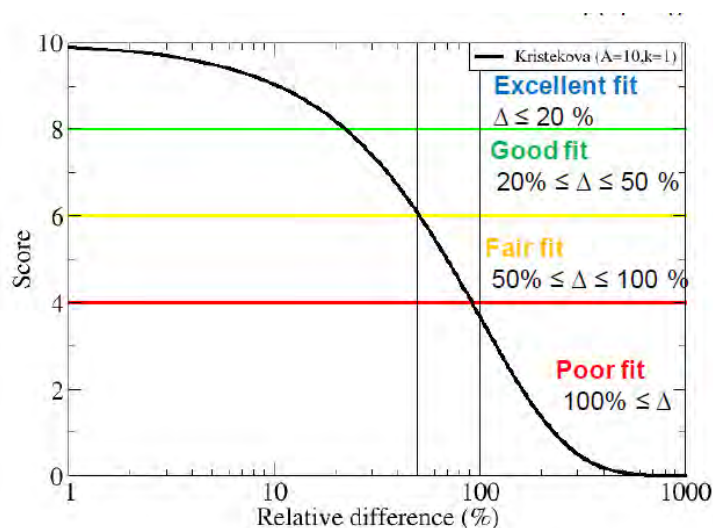


FIG. 3.3 – Les 4 niveaux de confiance selon le critère de Kristeková *et al.* (2006). Dans la suite, le même code de couleur sera utilisé pour comparer deux solutions numériques (bleu : très bon accord ; vert : bon accord ; jaune : accord moyen ; rouge : différences importantes).

3.1.4.1 Résultats pour le modèle A

La figure 3.4 montre les sismogrammes de la composante Nord de la vitesse calculés par les différentes méthodes aux positions des récepteurs 5 et 6. Ces récepteurs sont localisés en surface à l’intérieur du bassin (figure 2.24). De prime abord, il est difficile de comparer les traces sismiques à cause de la complexité des signaux. Les traces qui

semblent être les plus cohérentes sont celles des méthodes 3D01 (DF), 3D02 (ES), 3D04 (PS) et 3D09 (notre approche). Un filtrage des données avec un filtre passe-bas de 2 Hz (figure 3.5) confirme ces observations. On note toutefois que nous obtenons des résultats qui semblent 'être' en avance par rapport aux 3 autres solutions. L'écart observé semble s'accroître au fur et à mesure du temps de modélisation. Nous reviendrons sur cette observation dans la suite et proposerons une explication à ce phénomène.

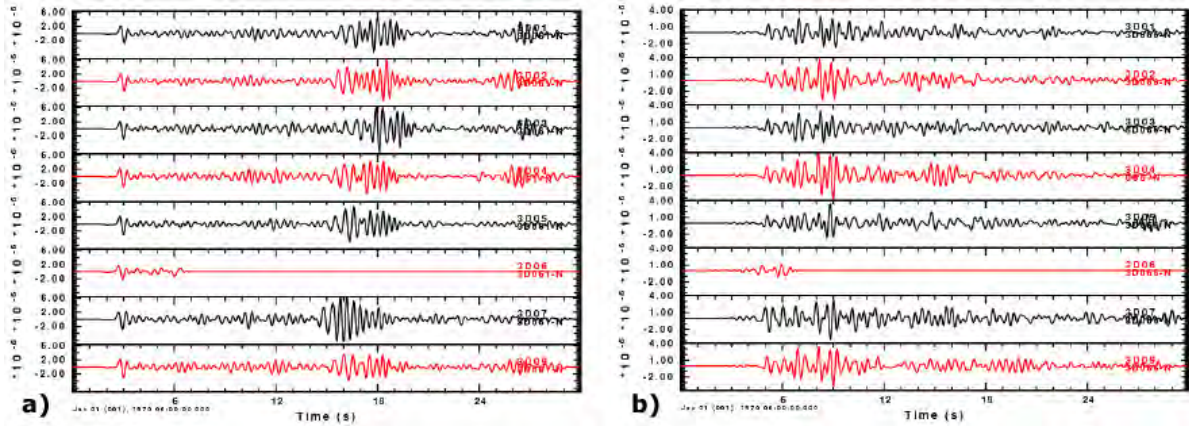


FIG. 3.4 – (a) Sismogrammes en vitesse (composante Nord) calculés par les différentes méthodes numériques au récepteur 5 pour le modèle A. De haut en bas : DF (3D01), ES (3D02), DF (3D03), PS (3D04), DF (3D05), ED (3D06), EF (3D07) et **GD (3D09)**. (b) Idem au récepteur 6. D'après Chaljub (2010).

La figure 3.6 montre les sismogrammes de la composante verticale de la vitesse calculés aux positions des mêmes récepteurs. On constate alors que la complexité des solutions numériques interdit toute comparaison évidente mais la proximité des 4 solutions précédemment mentionnées semble toujours être vérifiée.

Afin d'évaluer la cohérence des résultats entre les méthodes, nous pouvons établir une carte des facteurs de confiance selon le critère de Kristeková *et al.* (2006) en analysant les traces calculées pour chaque récepteur. Sur la figure 3.7, nous avons tracé les cartes des facteurs de confiance obtenues avec un réseau d'environ 300 récepteurs. Ces cartes ont été évaluées pour chaque méthode par rapport aux résultats calculés par la méthode DF (3D01) qui servira en général de référence dans l'ensemble des modélisations. En effet, les résultats obtenus par l'équipe 3D01 sont ceux qui présentent la meilleure cohérence par rapport aux autres modélisations. Il est à noter que la méthode utilisée par cette équipe est celle des différences finies avec grille discontinue (Moczo *et al.*, 2002). Ce schéma

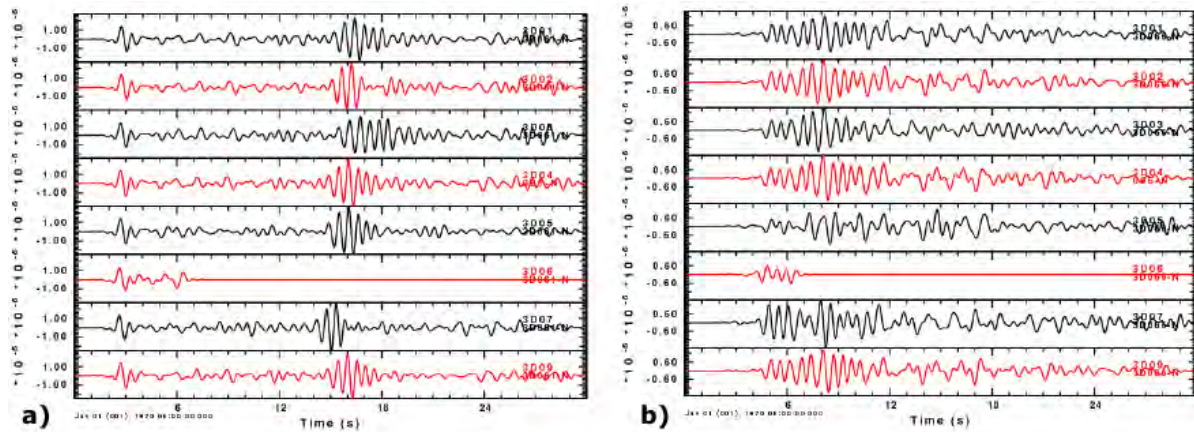


FIG. 3.5 – (a) et (b) Idem figure 3.4. Un filtre passe-bas à 2 Hz a été appliqué. D’après Chaljub (2010).

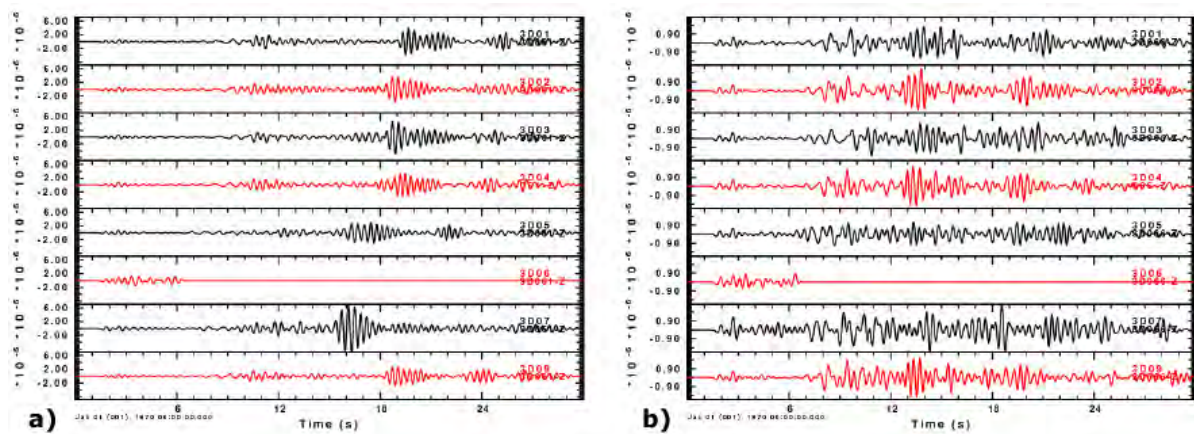


FIG. 3.6 – (a) Sismogrammes en vitesse (composante verticale) calculés par les différentes méthodes numériques au récepteur 5 pour le modèle A. De haut en bas : DF (3D01), ES (3D02), DF (3D03), PS (3D04), DF (3D05), ED (3D06), EF (3D07) et **GD (3D09)**. (b) Idem au récepteur 6. D’après Chaljub (2010).

numérique autorise une discrétisation très fine du bassin et une discrétisation beaucoup plus lâche dans le reste du modèle. En ce qui concerne nos résultats, nous observons un parfait accord au niveau des récepteurs localisés dans l’encaissant. En revanche, à l’intérieur du bassin, l’accord est moyen. On note des résultats similaires pour les autres méthodes. En effet, les ondes de surface qui se développent dans le bassin subissent des diffractions sur les bords de ce dernier. Ces phénomènes se traduisent par des trains

d'onde complexes que les méthodes ont du mal à reproduire à l'identique.

La figure 3.8 montre les cartes des facteurs de confiance obtenues en filtrant les sismogrammes avec un filtre passe-bas de 2 Hz. Comparativement à la figure 3.7, les résultats sont meilleurs pour l'ensemble des méthodes. Par conséquent, il paraît logique d'associer les écarts observés dans les données brutes à des phénomènes de dispersion numérique qui affectent les plus hautes fréquences.

Hormis les problèmes de dispersion numérique qui peuvent entacher les résultats, un aspect critique concerne la discrétisation des propriétés physiques. La figure 3.9 montre la vitesse V_S effectivement associée à chaque élément localisé à la surface du maillage que nous avons construit. Nous avons volontairement utilisé pour la visualisation une échelle de vitesse réduite afin de mettre en évidence les effets de l'approximation des propriétés de manière constante par élément. Nous constatons alors que la vitesse V_S à la surface n'est pas discrétisée de manière régulière comme cela devrait être le cas. En particulier, proche des limites du bassin, nous observons des zones où les vitesses alternent selon les éléments (comme dans la partie Est avec $y = 10$ km). C'est un résultat de l'approximation des propriétés du milieu que nous avons choisie. En effet, pour l'attribution des propriétés physiques, nous nous sommes basés sur la position du barycentre des éléments par rapport aux interfaces des couches. Par conséquence, au niveau des interfaces nous obtenons une discrétisation en 'dents de scie' due à la présence d'éléments qui sont à cheval sur une interface. Cependant, si la taille des éléments est suffisamment petite par rapport à la longueur d'onde propagée, une discrétisation irrégulière des interfaces peut être satisfaisante. La figure 3.10 montre le rayon de la sphère inscrite dans chaque élément localisé en surface. Pour obtenir la hauteur moyenne des tétraèdres, il suffit de multiplier le rayon par 4. D'après la figure 3.10, nous estimons que, dans le bassin, les éléments ont des rayons moyens de 2.5 m ce qui correspond à des hauteurs moyennes de l'ordre de 10 m. Nous obtenons une discrétisation de 5 éléments par λ_{min} ($\lambda_{min} = 50$ m). Si cette discrétisation est suffisante pour s'affranchir des phénomènes de dispersion numérique selon notre expérience, elle ne permet pas néanmoins de représenter finement la première couche du bassin qui présente à certains endroits une épaisseur inférieure à 10 m (figure 3.1.a). Notons que nous avons utilisé pour nos simulations un maillage construit selon un procédé dédié en priorité à l'imagerie sismique. L'idéal aurait été de construire un maillage contraint au niveau des interfaces. Néanmoins, on constate que notre approche permet d'obtenir des résultats avec une précision similaire aux autres méthodes qui de leur côté ont adopté des techniques de discrétisation plus adéquates (maillage contraint au niveau des interfaces pour la méthode ES et grilles ultra-fines pour les méthodes DF).

L'avance progressive que nous observons dans nos signaux peut donc s'expliquer par le fait, qu'en surface, la vitesse V_S est par endroit supérieure à la vitesse théorique. En revanche, la forme et l'amplitude des trains d'onde sont assez bien reproduites. Ceci peut se vérifier sur la carte des pics de vitesse (figure 3.11) qui montre un excellent accord de nos résultats avec les 3 autres méthodes. Ces cartes représentent en tout point la vitesse maximale enregistrée en surface. Les formes que l'on observe à l'intérieur du bassin sont en réalité les traces laissées par des ondes de surface qui traversent le bassin et qui sont diffractées aux bords de ce dernier.

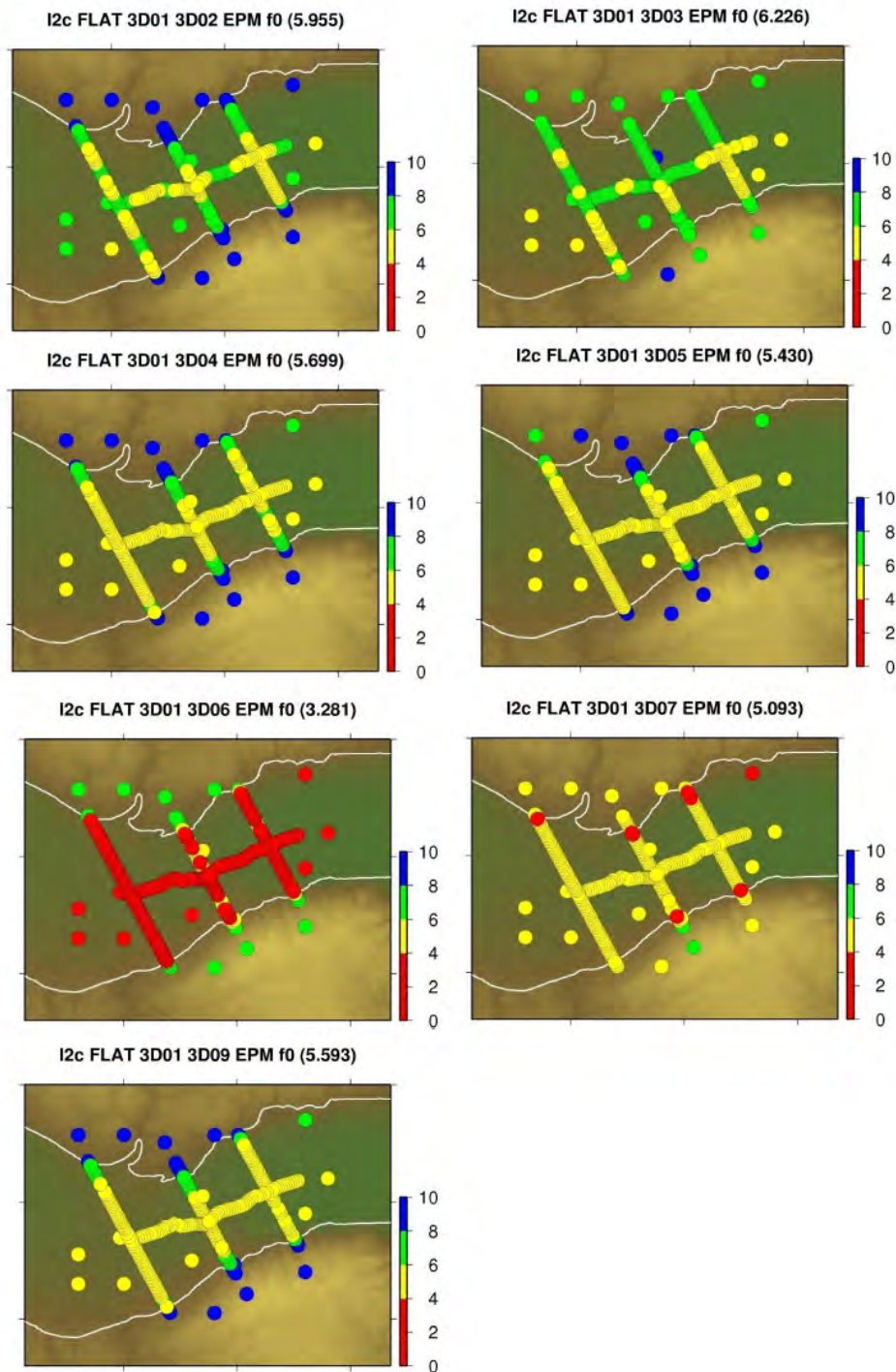


FIG. 3.7 – Cartes des facteurs de confiance (conjointement pour l’amplitude et la phase) pour le modèle A. Chaque carte représente les niveaux de cohérence des sismogrammes calculés à la position des récepteurs pour chaque méthode avec les résultats obtenus par l’approche DF (3D01). L’identifiant des méthodes est indiqué dans le titre de chaque carte, ainsi que l’indice de confiance global (valeur entre parenthèse). D’après Chaljub (2010).

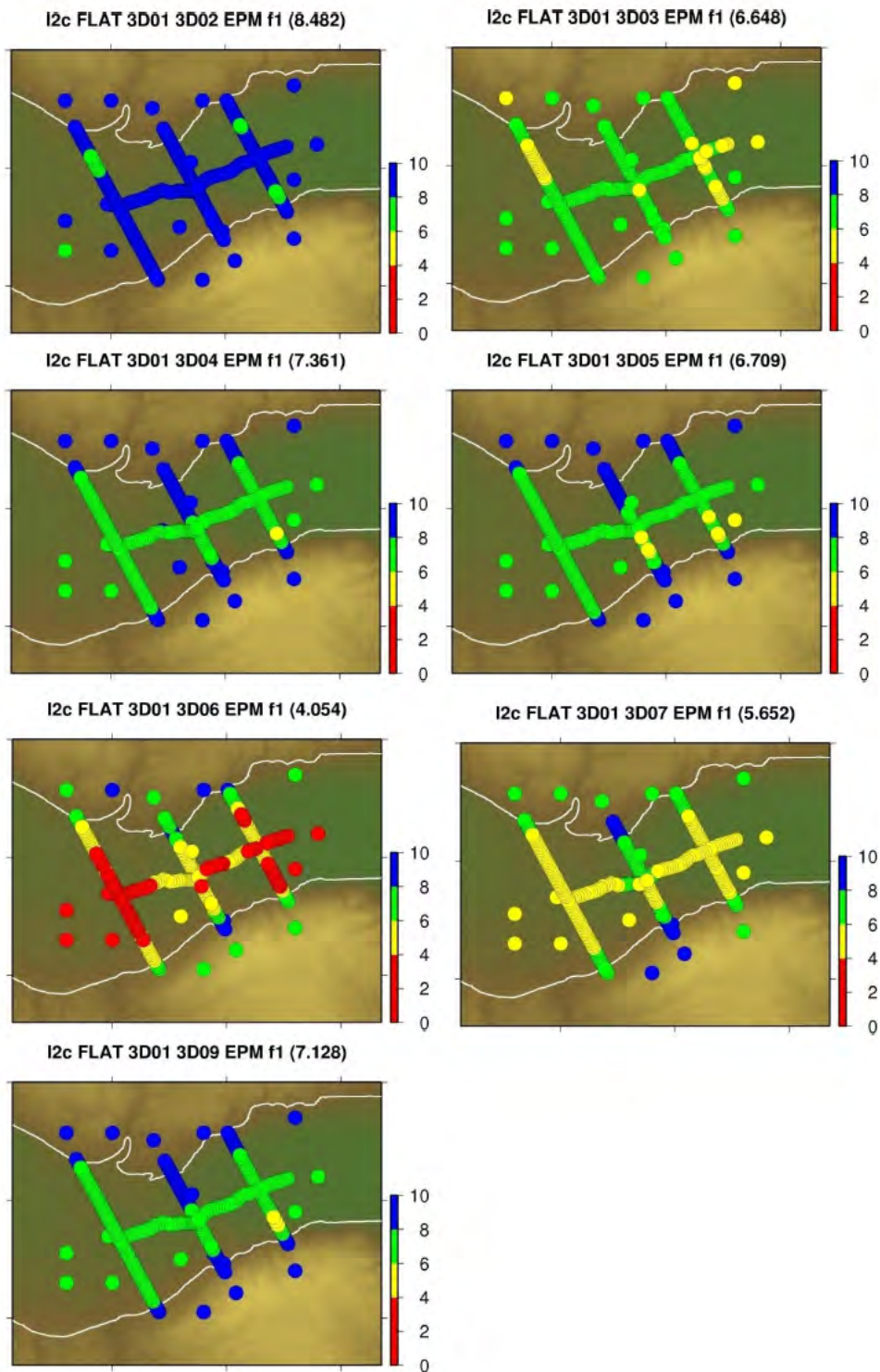


FIG. 3.8 – Idem figure 3.7. Un filtre passe-bas à 2 Hz a été appliqué sur les sismogrammes. D'après Chaljub (2010).

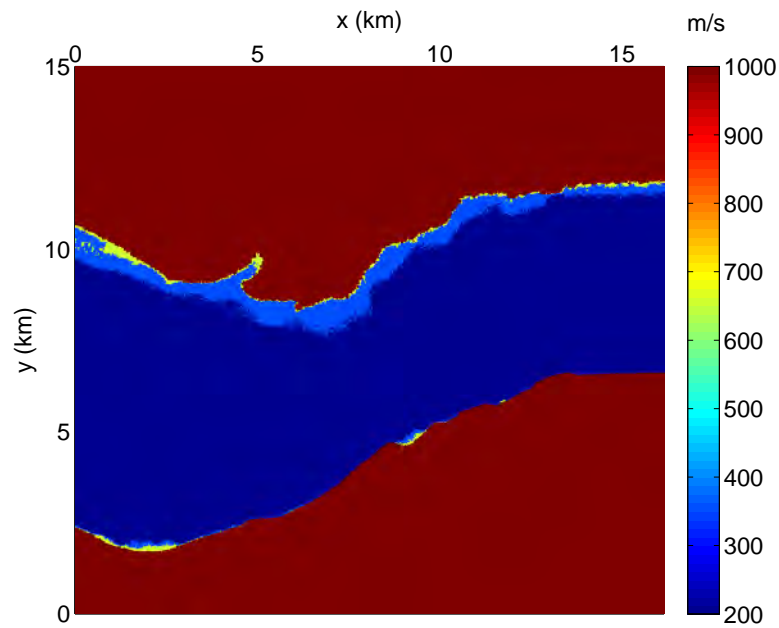


FIG. 3.9 – Vue de la vitesse V_S associée à chaque élément localisé en surface dans le maillage tétraédrique du modèle A. A des fins de visualisation, l'échelle est volontairement réduite de 200 à 1000 m/s.

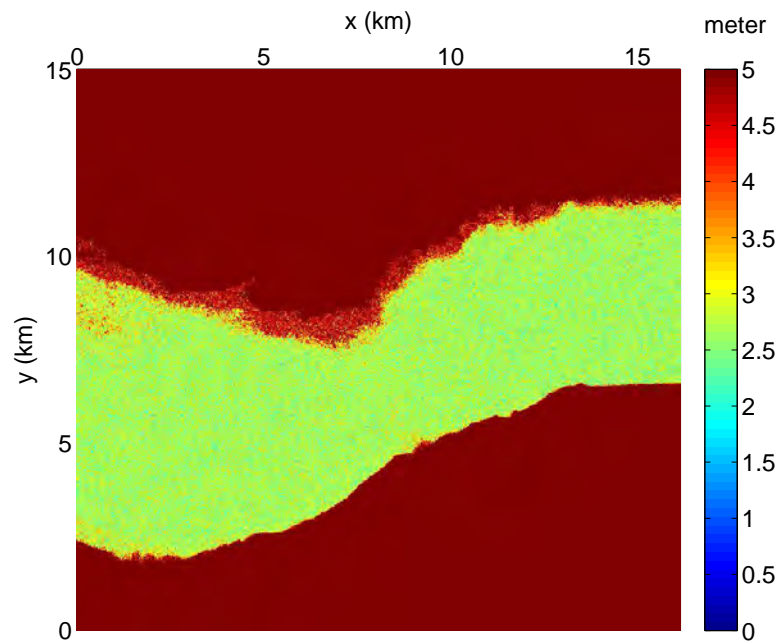


FIG. 3.10 – Vue du rayon de la sphère inscrite dans chaque élément localisé en surface dans le maillage tétraédrique du modèle A. A des fins de visualisation, l'échelle est volontairement réduite de 0 à 5 m.

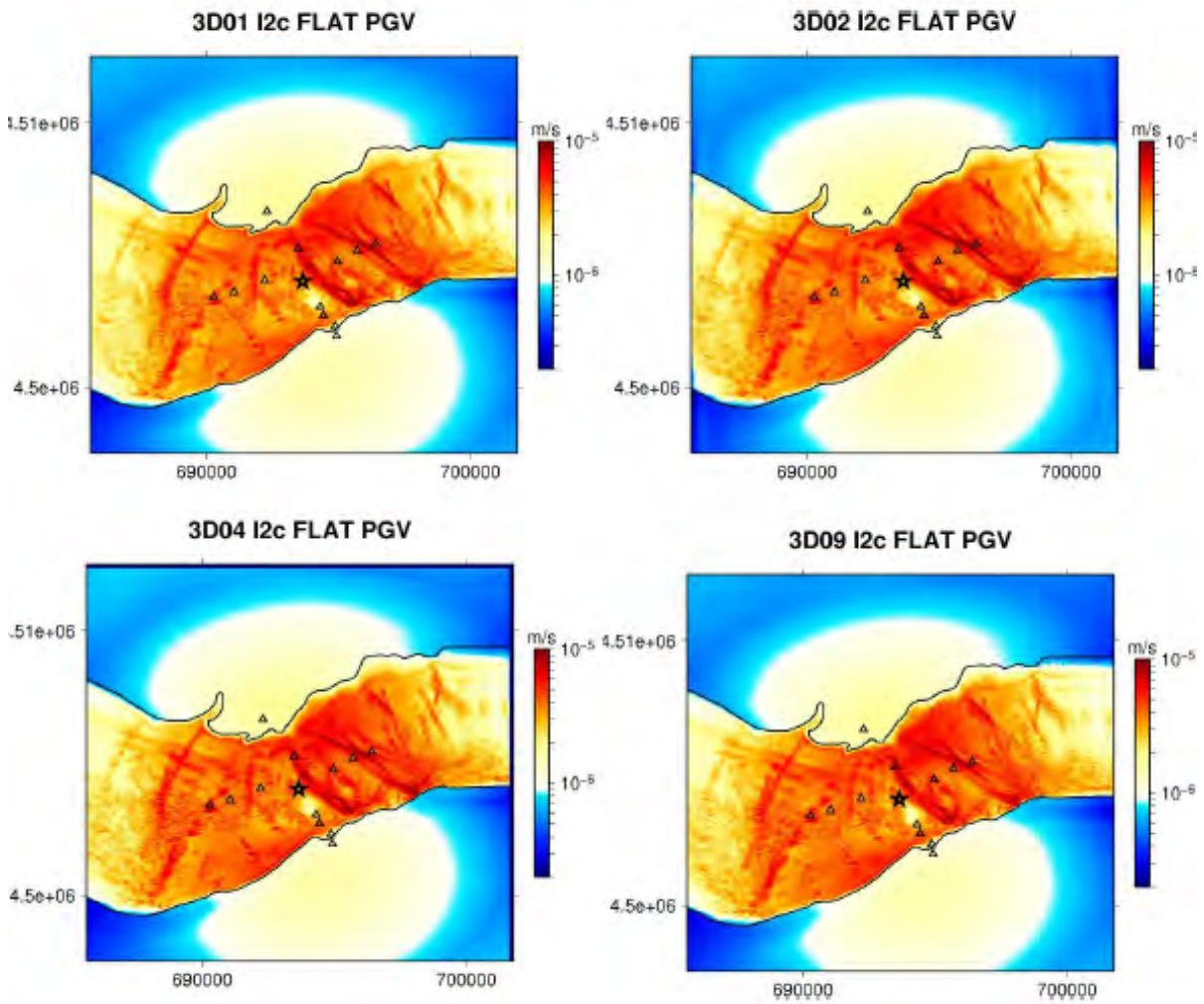


FIG. 3.11 – Cartes des pics de vitesse calculées par différentes méthodes numériques pour le modèle A. L'identifiant des méthodes est indiqué dans le titre de chaque carte. D'après Chaljub (2010).

3.1.4.2 Résultats pour le modèle B

Les résultats concernant ce modèle ont déjà été présentés dans le chapitre précédent. Dans la suite, nous apportons des éléments d'analyse sur les écarts observés dans les résultats. La figure 3.12 montre les sismogrammes de la composante Nord de la vitesse calculés aux récepteurs 5 et 6. Par rapport à la figure 3.4, on constate que les traces non-filtrées présentent une meilleure cohérence générale. La propagation dans le modèle à gradient (modèle B) semble plus facile à reproduire par les méthodes numériques que dans le cas du modèle à couches (modèle A). Des conclusions similaires peuvent être tirées pour la composante verticale de la vitesse (figure 3.13 par rapport à la figure 3.6).

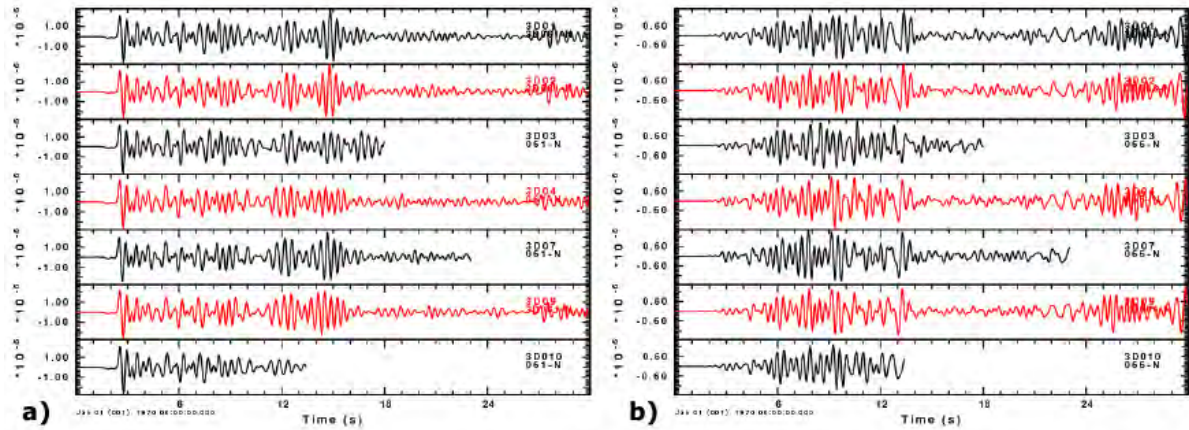


FIG. 3.12 – (a) Sismogrammes en vitesse (composante Nord) calculés par les différentes méthodes numériques au récepteur 5 pour le modèle B. De haut en bas : DF (3D01), ES (3D02), DF (3D03), PS (3D04), EF (3D07), **GD (3D09)** et GD (3D10). (b) Idem au récepteur 6. D'après Chaljub (2010).

Comme nous l'avons déjà constaté pour le modèle A, nous observons une avance légère et progressive des formes d'onde que nous avons calculées par rapport à la solution DF (3D01). Sur la figure 3.14, nous pouvons apercevoir que la vitesse V_S effective à la surface du maillage est en moyenne de 230 m/s et que cette vitesse est donc légèrement supérieure à la valeur théorique de 200 m/s. Il est à souligner que, pour ce modèle, nous avons associé à chaque élément, la moyenne des vitesses évaluées aux 4 noeuds. En effet, nous avons observé que cette stratégie fournissait de meilleurs résultats qu'en prenant simplement la vitesse évaluée au barycentre des éléments. Néanmoins, l'approximation des propriétés constantes par élément ne permet pas de représenter exactement le gradient de vitesse

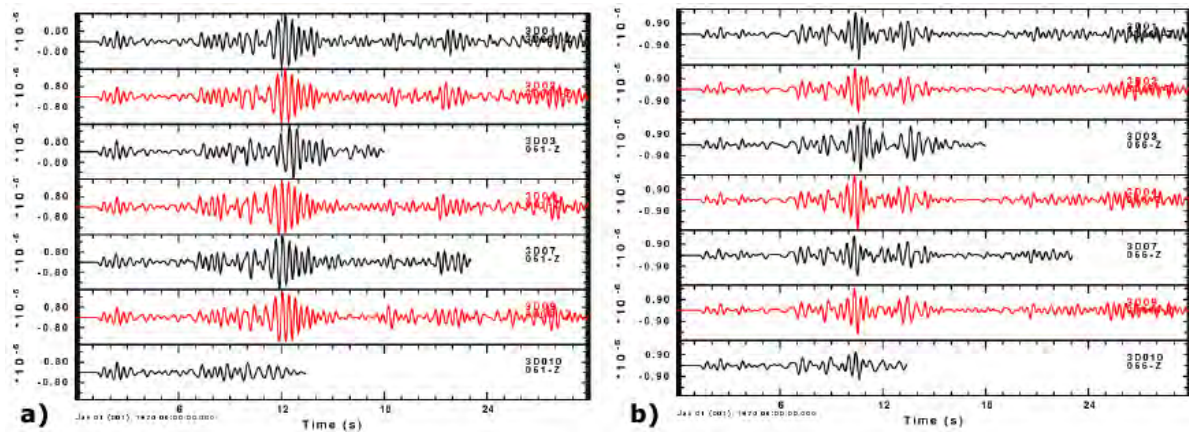


FIG. 3.13 – (a) et (b) Idem figure 3.12 pour la composante verticale de la vitesse. D’après Chaljub (2010).

au sein du bassin. Par conséquent, nous pouvons penser que les écarts observés dans les sismogrammes sont en partie la conséquence de cette approximation.

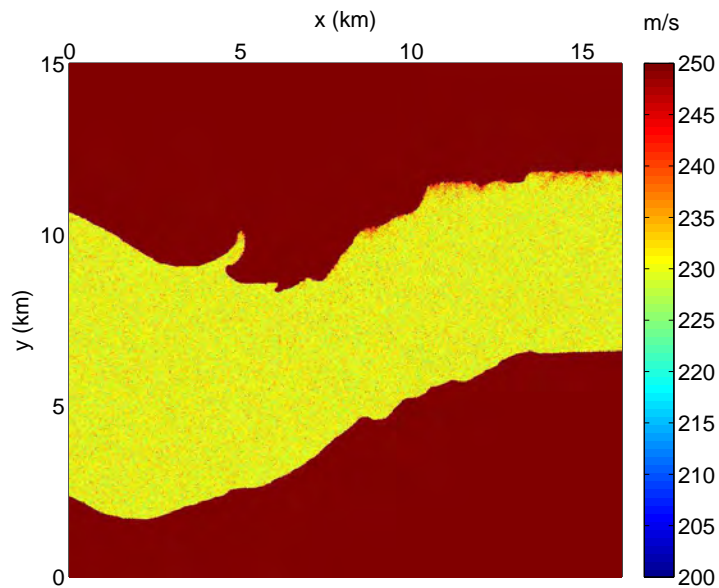


FIG. 3.14 – Vue de la vitesse V_S associée à chaque élément localisé en surface dans le maillage tétraédrique du modèle B. A des fins de visualisation, l’échelle est volontairement réduite de 200 à 250 m/s.

Comme nous pouvons le voir sur la carte des niveaux de confiance (figure 3.15), nous obtenons de meilleurs résultats que dans le modèle précédent. Cette tendance est vérifiée

pour l'ensemble des méthodes. Les résultats obtenus par notre approche sont en moyenne qualifiés de bons, sauf dans la partie Est du bassin où l'accord est en général moyen. En filtrant les données à 2 Hz, nous obtenons une cohérence parfaite avec la solution de référence (figure 3.16).

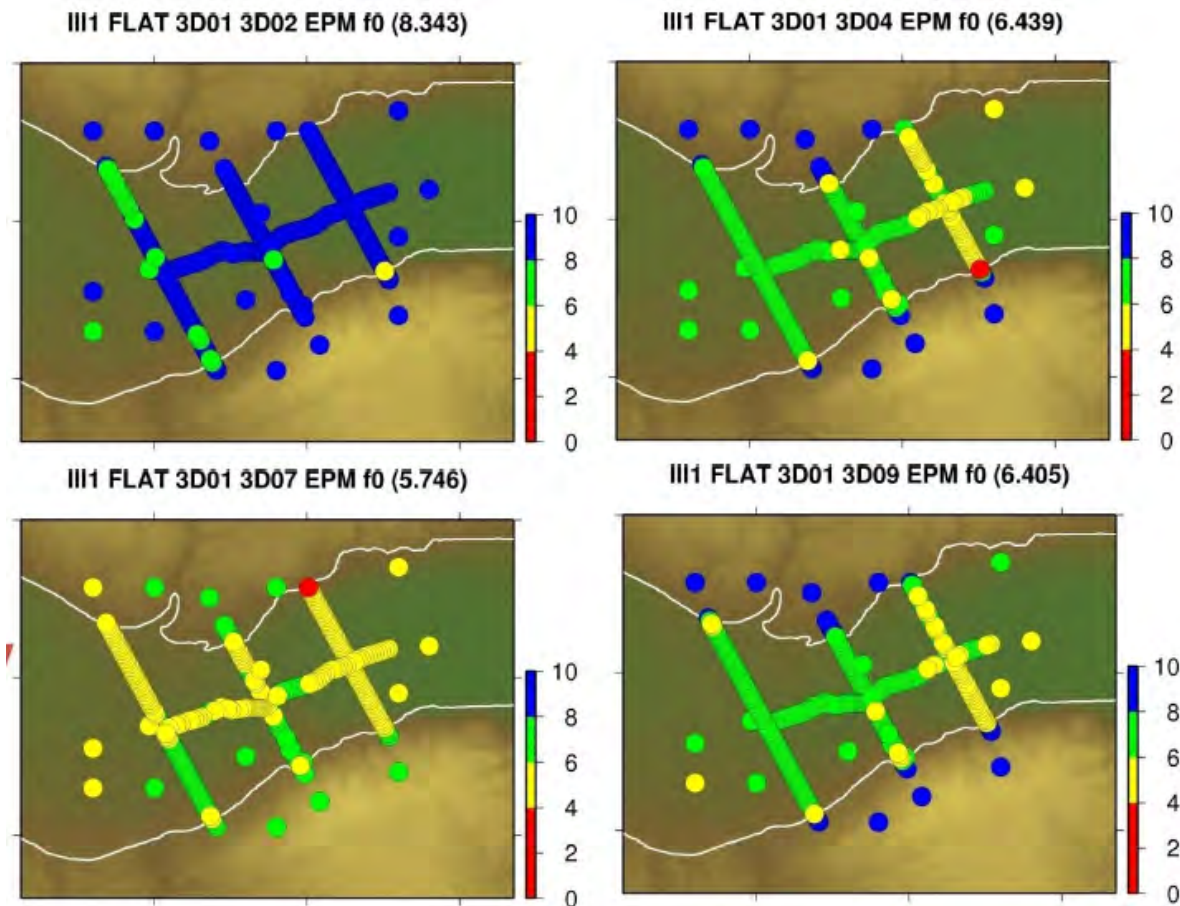


FIG. 3.15 – Cartes des facteurs de confiance (conjointement pour l'amplitude et phase) pour le modèle B. Chaque carte représente les niveaux de cohérence des sismogrammes calculés à la position des récepteurs pour chaque méthode avec les résultats obtenus par l'approche DF (3D01). Les identifiants des méthodes sont indiqués dans le titre de chaque carte, ainsi que l'indice de confiance global (valeur entre parenthèse). D'après Chaljub (2010).

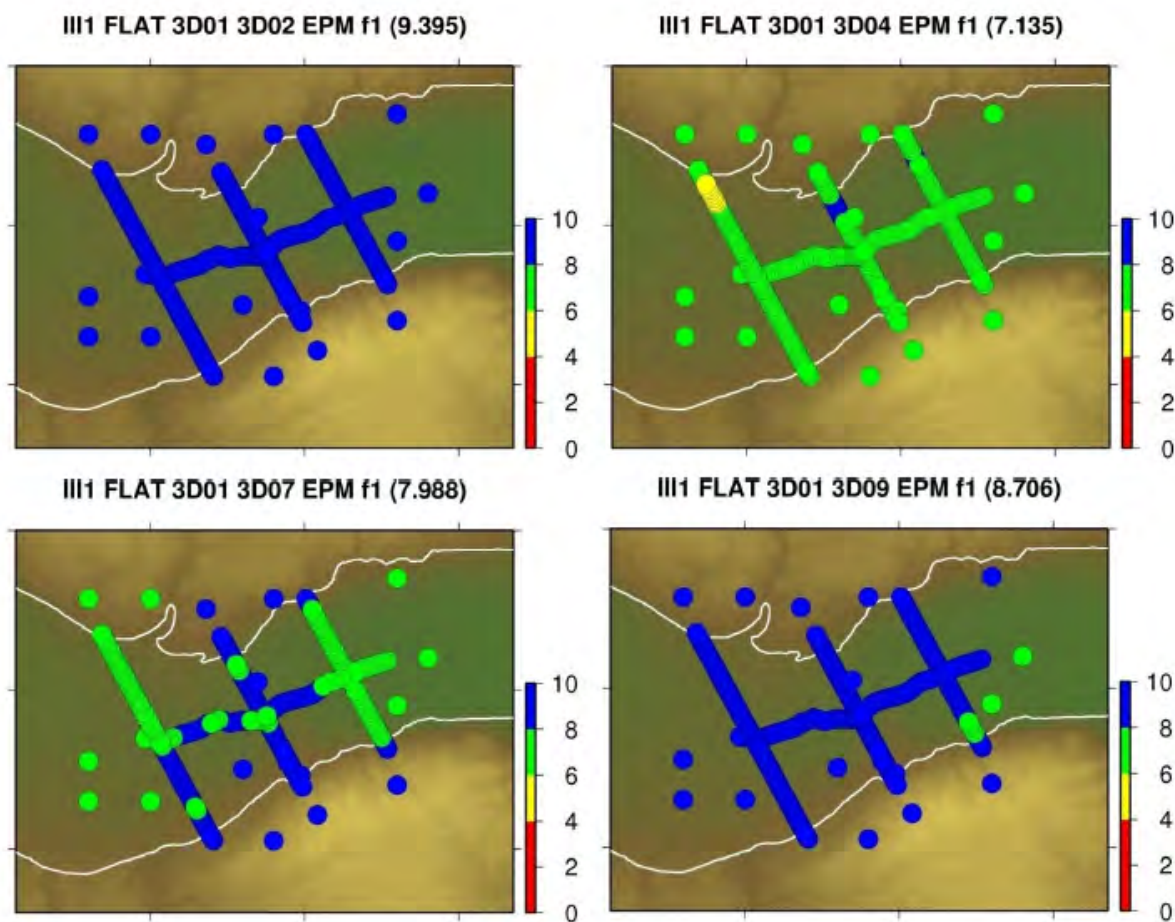


FIG. 3.16 – Idem figure 3.15. Un filtre passe-bas à 2 Hz a été appliqué. D'après Chaljub (2010).

3.1.4.3 Résultats pour le modèle C

Comme précédemment, les figures 3.17 et 3.18 représentent les traces calculées par les différentes méthodes aux récepteurs 5 et 6. Comparativement aux modèles A et B, nous obtenons une situation quasi-similaire entre les méthodes. Parmi l'ensemble des combinaisons possibles, le meilleur accord est observé entre les résultats de la méthode PS (3D04) et ceux de notre approche. Ceci peut se mesurer sur la carte des niveaux de confiance de la figure 3.19. Dans la figure 3.20, nous avons séparé les écarts sur la phase et sur l'amplitude. Comme nous l'avons observé dans les sismogrammes, l'erreur sur la phase est prépondérante (dans la partie Est du bassin, carte en bas à droite) par rapport à l'erreur sur l'amplitude (carte en haut à droite).

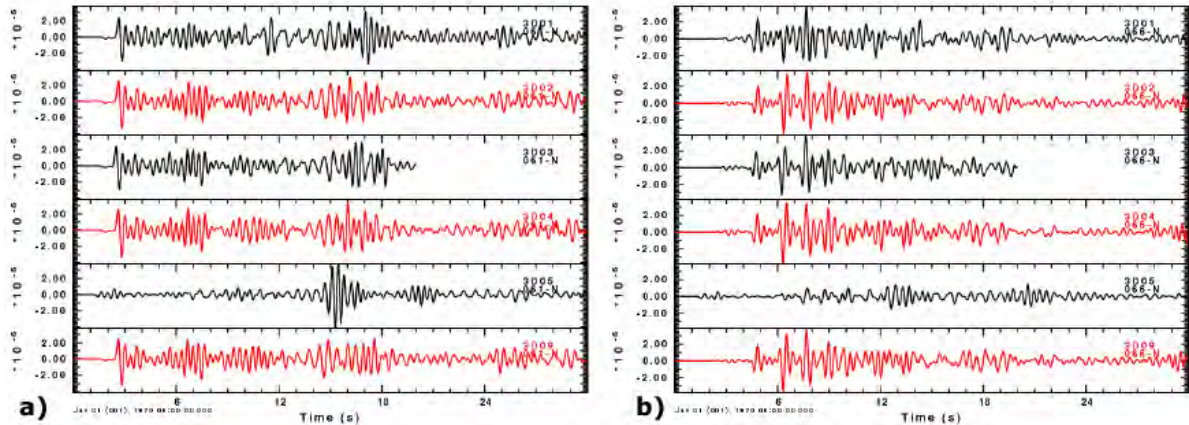


FIG. 3.17 – (a) Sismogrammes en vitesse (composante Nord) calculés par les différentes méthodes numériques au récepteur 5 pour le modèle C. De haut en bas : DF (3D01), ES (3D02), DF (3D03), PS (3D04), DF (3D05) et **GD (3D09)**. (b) Idem au récepteur 6. D'après Chaljub (2010).

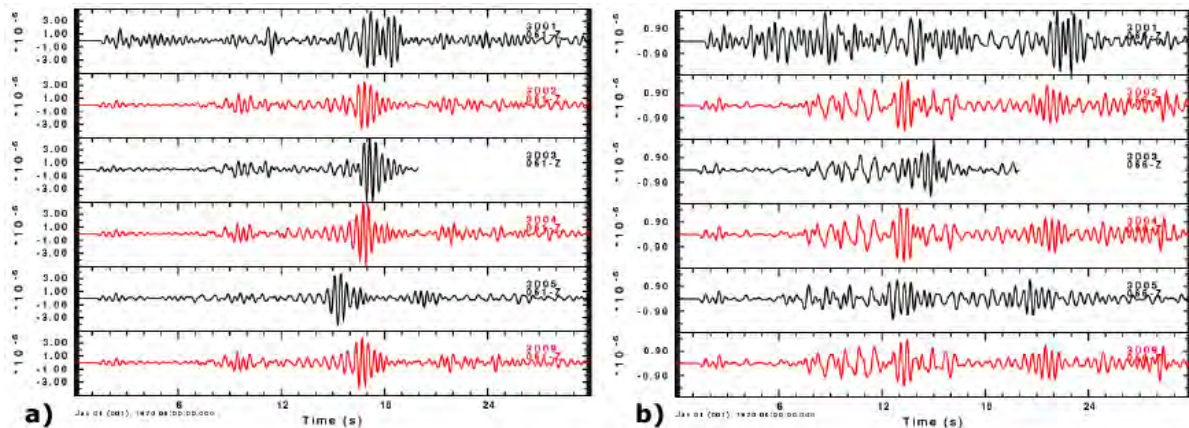


FIG. 3.18 – (a) et (b) Idem figure 3.17 pour la composante verticale de la vitesse. D'après Chaljub (2010).

Pour conclure cette série de modélisations, nous constatons que nous obtenons de meilleurs résultats pour les modèles B et C où les vitesses sont lisses à l'intérieur du bassin. Au contraire, dans le modèle A, nous pouvons penser que le procédé de raffinement itératif de maillage que nous avons adopté ne permet pas de représenter fidèlement les couches du bassin. Néanmoins, dans tous les cas, nous obtenons des résultats avec une précision globalement bonne et équivalente aux autres méthodes.

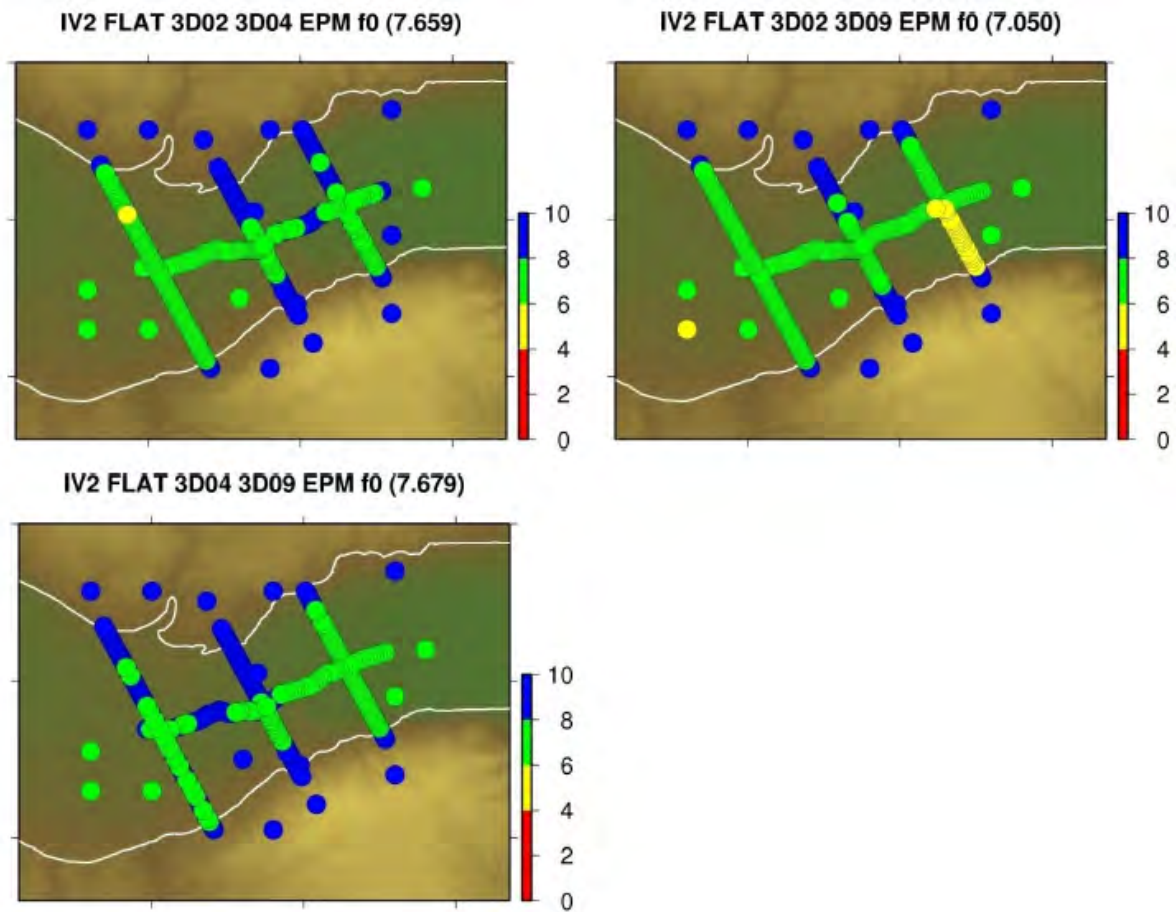


FIG. 3.19 – Cartes des facteurs de confiance (conjointement pour l’amplitude et phase) pour le modèle C. Les méthodes comparées sont ES (3D02), PS (3D04) et **GD (3D09)**. Les identifiants des méthodes sont indiqués dans le titre de chaque carte, ainsi que l’indice de confiance global (valeur entre parenthèse). D’après Chaljub (2010).

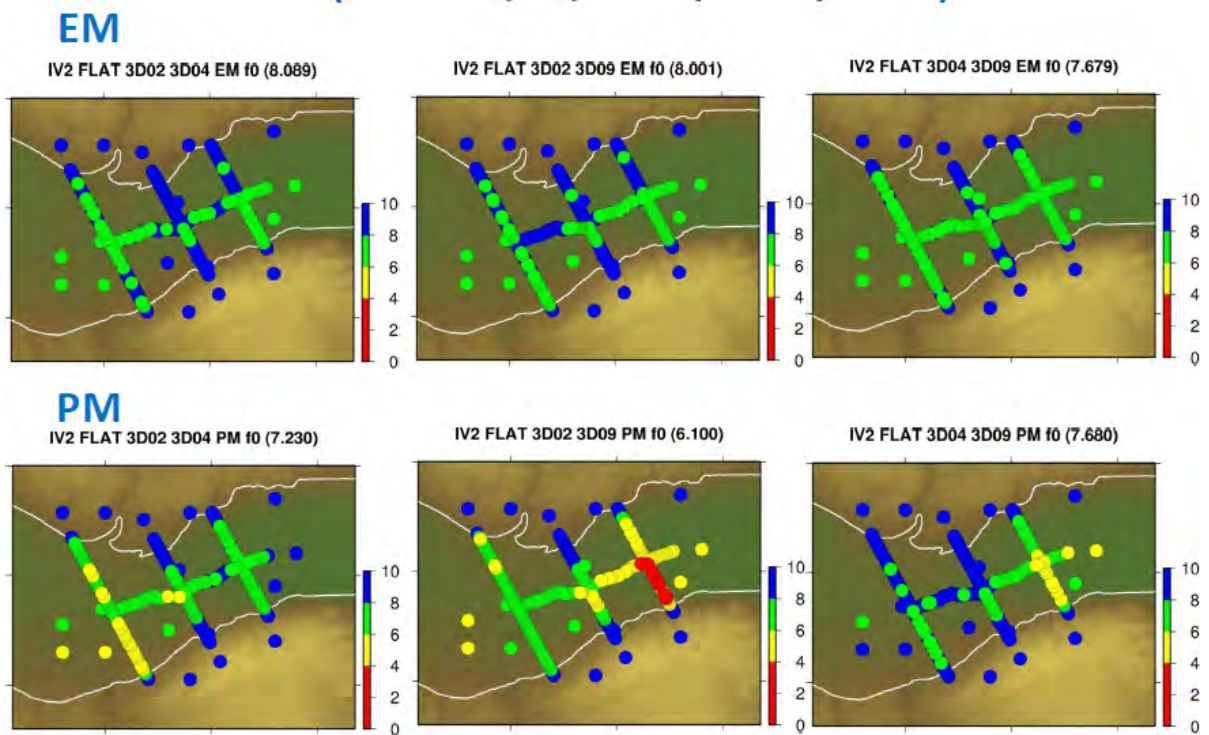


FIG. 3.20 – Cartes des facteurs de confiance pour le modèle C. Les cartes du haut concernent les écarts sur l’amplitude et celles du bas, les écarts sur la phase. Les méthodes comparées sont ES (3D02), PS (3D04) et **GD** (3D09). Les identifiants des méthodes sont indiqués dans le titre de chaque carte, ainsi que l’indice de confiance global (valeur entre parenthèse). D’après Chaljub (2010).

3.2 Le massif de Rustrel

3.2.1 Description du modèle

Ce modèle représente la partie Sud du plateau d'Albion à proximité du village de Rustrel (Vaucluse). Ce massif abrite le Laboratoire Souterrain à Bas Bruit de Rustrel (LSBB) labellisé "Site instrumenté en Terre Interne" par l'INSU depuis 2009. Les dimensions du modèle sont $5 \text{ km} \times 5 \text{ km} \times 6.2 \text{ km}$ en xyz respectivement (figure 3.21). Ce modèle présente une topographie variée comprenant des crêtes et des vallées de différentes accentuations et orientations pour un dénivelé global d'environ 800 m (figure 3.22).

3.2.2 Objectifs de la modélisation

La géométrie de la surface libre affecte le mouvement du sol et peut générer des amplifications importantes (Geli *et al.*, 1988). Ce phénomène est appelé effet de site topographique. La prédiction de l'amplification topographique représente un enjeu important de la prévention parasismique (Maufroy, 2010; Maufroy *et al.*, 2010a). Dans cette application, on s'intéresse à caractériser les effets de site topographique par des modélisations numériques. Nous cherchons en particulier à évaluer les coefficients d'amplification que l'on définit par la méthode classique des rapports spectraux (Davis & West, 1973) comme suit :

$$F_{amp}(r, s, c, \omega) = \frac{A(r, s, c, \omega)}{A(r_{ref}, s, c, \omega)}, \quad (3.1)$$

où r désigne une position où l'on souhaite évaluer l'amplification, s la position de la source et c la composante de vitesse (v_x, v_y, v_z) . $A(r, s, c, \omega)$ est le module de la transformée de Fourier à la fréquence considérée ($\omega = 2\pi f$) du signal sismique enregistré en r . L'expression (3.1) requiert la définition d'un site de référence r_{ref} qui doit présenter des conditions géologiques identiques aux zones que l'on cherche à caractériser. Toutefois, il est nécessaire que le site de référence soit situé dans une zone hors d'influence de l'effet de site topographique que l'on souhaite analyser (Chavéz-García *et al.*, 1996). Ces conditions antinomiques s'avèrent difficiles à respecter en milieu montagneux. Afin de s'affranchir de la définition d'un site de référence, on introduit le facteur statistique

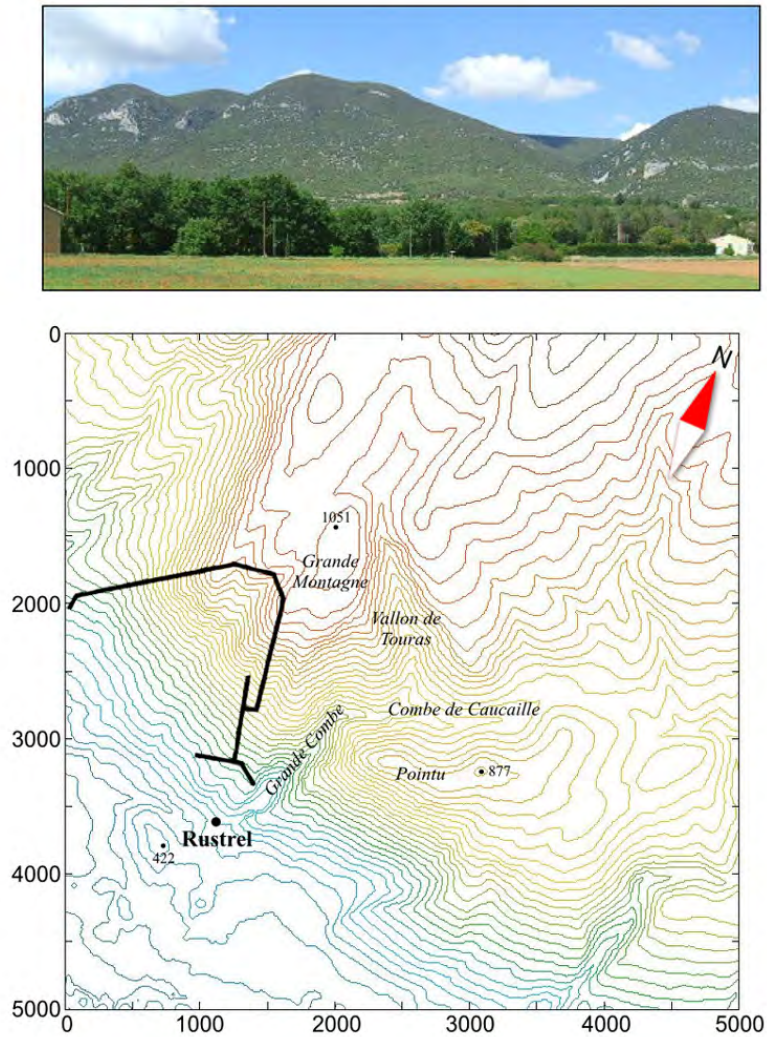


FIG. 3.21 – Le massif de Rustrel, d’après Maufroy (2010). Les segments noirs représentent les galeries du LSBB.

(Wilson & Pavlis, 2000; Maufroy *et al.*, 2010b) défini par :

$$F_{amp}(r, s, c, \omega) = \text{médiane}\left(\frac{A(r, s, c, \omega)}{A(i, s, c, \omega)}\right) \quad \text{avec } i = 1, \dots, N_r \quad (3.2)$$

avec N_r le nombre de points d’observation. Pour établir une carte des coefficients d’amplification, nous avons défini un réseau de 400 récepteurs (figure 3.22) qui couvrent une zone de dimension 2 km × 2 km et nous avons utilisé la définition (3.2). L’intérêt de cette approche statistique pour l’estimation de l’amplification topographique a été démontré dans le cadre de la thèse de Maufroy (2010) ayant pour objectif l’élaboration d’une mé-

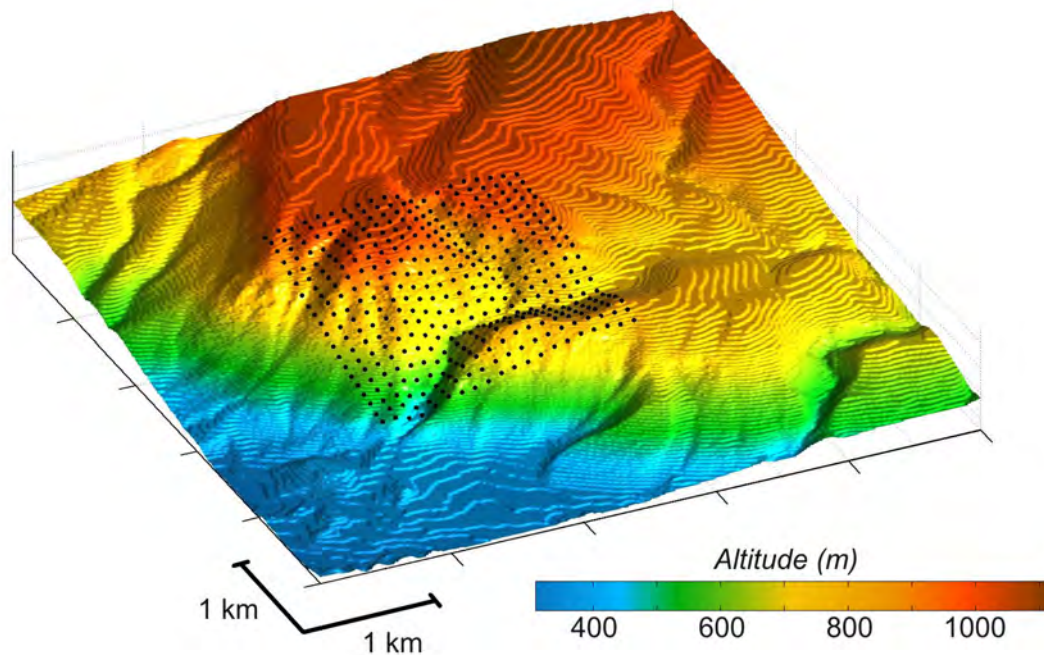


FIG. 3.22 – La topographie du massif de Rustrel définie sur une grille de 10 m. Les positions des 400 récepteurs sont indiquées par les points noirs.

thodologie pour caractériser l'effet de site topographique. En ce qui nous concerne, nous profitons de cette étude pour confronter les résultats obtenus par la méthode GD à ceux obtenus par une méthode DF.

3.2.3 Construction du maillage

Les caractéristiques physiques du modèle sont homogènes avec $V_P = 5000$ m/s, $V_S = 3000$ m/s et $\rho = 2600$ m/kg³. Aussi, nous avons construit un maillage relativement homogène. La taille caractéristique des éléments est fixée à $\lambda_{min}/6$ soit 100 m pour une fréquence maximum de 5 Hz. La topographie a été prise en compte par une triangulation de la surface à l'aide de triangles rectangles de 50 m de côté (figure 3.23). Le maillage obtenu comporte environ 3.2 millions d'éléments et représente un problème numérique d'environ 290 millions d'inconnues. Les caractéristiques du maillage sont résumées dans le tableau 3.3.

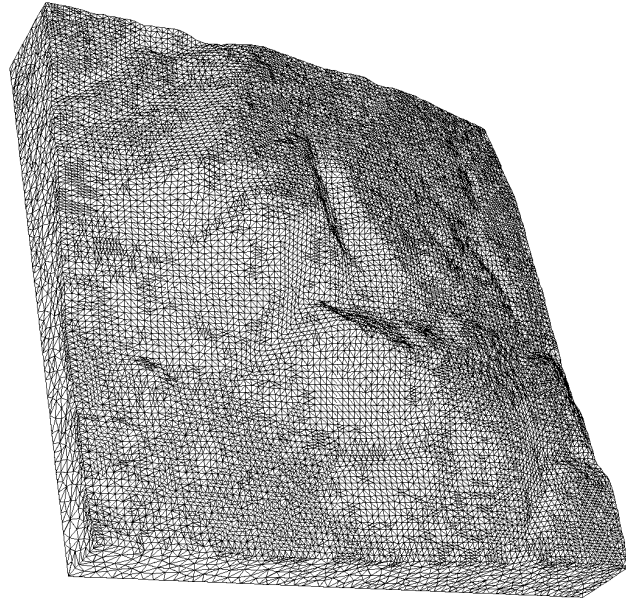


FIG. 3.23 – Vue du maillage pour le modèle de Rustrel (Sud en bas). La topographie a été discrétisée à l’aide de triangles rectangles de 50 m de côté. A des fins de visualisation, le bas du maillage a été tronqué.

3.2.4 Résultats numériques

On s’intéresse à comparer les résultats obtenus par les approches GD et DF. La méthode DF utilisée repose sur le schéma tourné du second ordre (Saenger & Bohlen, 2004b) et sur l’outil développé par Cruz-Atienza & Virieux (2004). Les statistiques relatives à ces deux approches sont consignées dans le tableau 3.3.

Afin d’échantillonner finement la topographie et d’éviter les artefacts numériques, la discrétisation spatiale de la grille DF est de 10 m. Cet échantillonnage correspond à 60 points par λ_{min} et satisfait les critères énoncés par Bohlen & Saenger (2006) en cas de topographie complexe. Cet échantillonnage fin aboutit à un nombre d’inconnues relativement élevé (environ 1.6 milliards) par rapport au nombre d’inconnues avec l’approche GD (290 millions). Néanmoins, l’efficacité des DF se mesure au temps moyen de calcul par inconnue et par pas en temps qui est environ 5 fois plus petit par rapport à la méthode GD. Et en raison du nombre de pas temps quasiment 5 fois plus important avec l’approche GD, la méthode DF reste la plus efficace (environ deux fois plus rapide pour un même nombre de processeurs). Il est à noter que nous avons considéré un modèle

TAB. 3.3 – Statistiques concernant les modélisations pour le modèle du massif de Rustrel. Les calculs ont été réalisés avec des processeurs bi-pro quad core Opteron 2.7 Ghz pour l’approche GD et octo-pro dual core Opteron 2,6 Ghz pour l’approche DF.

	Approche GD	Approche DF
Temps de modélisation	5 s	5 s
Nb éléments ou points de grille	3.2 millions	182.6 millions
Ordre en espace	P_2	2 nd ordre
Ordre en temps	2 nd ordre	2 nd ordre
Nb inconnues	290 millions	1605 millions
Min. / Moy. / Max. longueur élément ou pas de grille	19 / 100 / 185 m	10 m
Nb de pas en temps	14 989	3 333
Nb CPUs	32	1
Précision	Double	Simple
Mémoire totale	~ 5 GB	~ 12 GB
Mémoire par CPU	116 - 189 MB	12 GB
Temps de calcul	~ 10 h	~ 70 h
Temps / inconnue / pas en temps	0.265 μ s	0.047 μ s

homogène qui ne permet pas de tirer profit de la h -adaptivité de la méthode GD. Dans le cas de scénarios plus réalistes avec des faibles vitesses à la surface, on peut attendre un réel gain de l’approche GD par rapport à celle des DF.

La figure 3.24 permet de comparer les cartes des coefficients d’amplification topographique pour les 3 composantes de vitesse calculées avec les deux approches à une fréquence de 1.5 Hz. Pour chaque composante, on définit la carte de déviation comme le rapport entre les différences des valeurs obtenues en un point par les deux méthodes et la valeur de référence obtenue par la méthode DF. Une déviation positive de 100 % indique que le coefficient d’amplification estimé à partir des données calculées par le code GD est deux fois supérieur à celui estimé à partir du code DF.

Sur la figure 3.24, nous constatons un bon accord des résultats entre les deux méthodes. Par ailleurs, les zones de plus fortes déviations sont situées aux endroits où le coefficient d’amplification est minimal. Dans un but applicatif, on conclut que les deux méthodes confortent la localisation des zones avec un fort taux d’amplification tandis que les écarts observés dans les zones à faible taux d’amplification ne sont pas significatifs en terme de risque sismique. Des conclusions similaires peuvent être tirées pour la fréquence de 3 Hz comme l’atteste la figure 3.25 avec des écarts confinés dans les zones

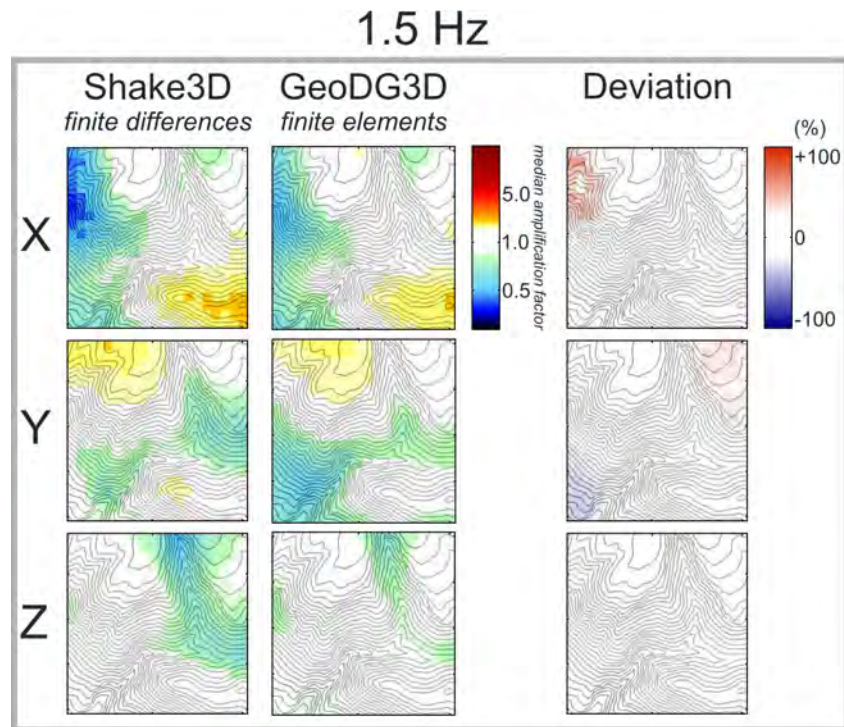


FIG. 3.24 – Carte du coefficient d’amplification topographique calculé dans le modèle de Rustrel pour une fréquence de 1.5 Hz par les méthodes DF et GD. D’après Maufroy (2010).

à plus faible coefficient d’amplification.

A la fréquence de 5 Hz, le diagnostic devient plus complexe (figure 3.26) mais globalement les répartitions des forts coefficients d’amplification se corrént bien d’une méthode à l’autre.

La figure 3.27 est une synthèse des comparaisons entre les résultats obtenus par les approches GD et DF. Pour toutes les composantes et toutes les fréquences, les plus grands écarts sont observés pour les coefficients d’amplification les plus faibles. Si ces résultats sont satisfaisants dans le cadre d’une étude de risque sismique, il serait toutefois intéressant de comprendre l’origine des écarts observés. Dans cette optique, une analyse de convergence en fonction du pas de discrétisation pour les DF et de la longueur des éléments pour les GD devrait permettre d’affiner le diagnostic. Quoiqu’il en soit, ces tests montrent que, dans une perspective d’étude de risque sismique à plus haute fréquence, il est nécessaire d’avoir recours à plusieurs méthodes afin de contraindre les cartes d’amplification sur lesquelles les ingénieurs para-sismiques pourront se baser de manière rigoureuse.

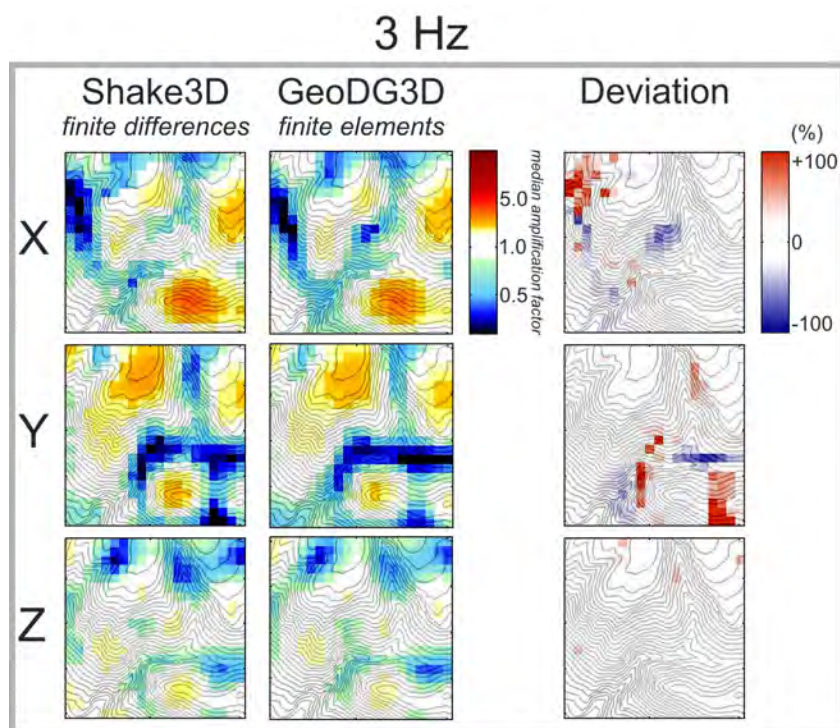


FIG. 3.25 – Carte du coefficient d’amplification topographique calculé dans le modèle de Rustrel pour une fréquence de 3 Hz par les méthodes DF et GD. D’après Maufroy (2010).

3.3 Le volcan de la Soufrière

3.3.1 Un volcan actif

La Soufrière de Guadeloupe (figure 3.28) est l’un des neuf volcans actifs de l’arc des Petites Antilles. Elle appartient à un ensemble volcanique récent situé dans la partie sud de la Basse-Terre (Guadeloupe proprement-dite). La dernière crise majeure de la Soufrière est une éruption phréatique prolongée ayant entraîné une évacuation spontanée le 8 juillet 1976 (25 000 personnes) ainsi qu’une évacuation provoquée le 15 août 1976 (plus de 70 000 personnes). Après les événements de 1976, on observe une décroissance régulière de l’activité de la Soufrière, notamment par une disparition rapide de la sismicité de forte énergie, puis une plus lente décroissance de l’activité fumerollienne. A partir de 1992, on assiste à une reprise de l’activité sismique, fumerollienne et thermique. En 1998, les fumerolles deviennent très corrosives en raison de l’apparition brutale d’acide chlorhydrique (HCl). Depuis, l’activité du système hydrothermal (circulations et

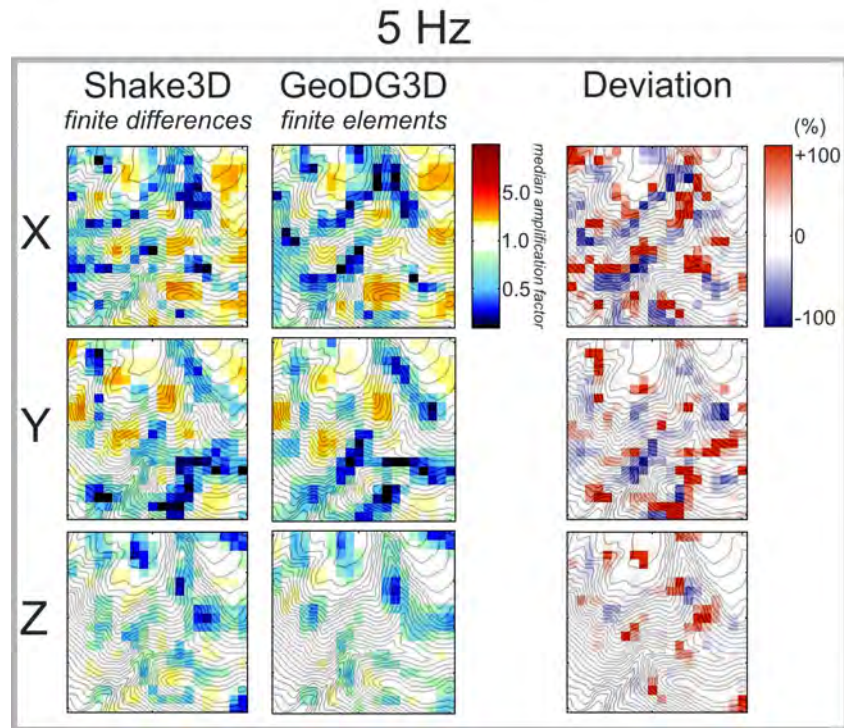


FIG. 3.26 – Carte du coefficient d’amplification topographique calculé dans le modèle de Rustrel pour une fréquence de 5 Hz par les méthodes DF et GD. D’après Maufroy (2010).

interactions de gaz, vapeur et eau sous pression dans la roche poreuse et fracturée) se maintient à un niveau élevé tout en indiquant, à l’échelle de plusieurs années, une lente augmentation globale. Si ces phénomènes incitent à la vigilance instrumentale, ils ne sont cependant pas associés à une anomalie des autres paramètres de surveillance liés à une éventuelle remontée de magma (séismes profonds, déformations à grande échelle, gaz soufrés à haute température). Depuis 1950, l’IPGP assure la surveillance au moyen d’un observatoire permanent. En effet, la surveillance instrumentale reste le seul moyen de prévention efficace contre les risques volcaniques.

3.3.2 Objectifs de la modélisation

Nous présentons des résultats préliminaires de modélisation d’ondes sismiques calculées avec un modèle de vitesse V_P obtenu par tomographie des temps de premières arrivées (Coutant *et al.*, 2010). La figure 3.29 est une coupe de ce modèle où l’on peut voir l’existence d’une zone haute vitesse en dessous du dôme de la Soufrière. Dans le but

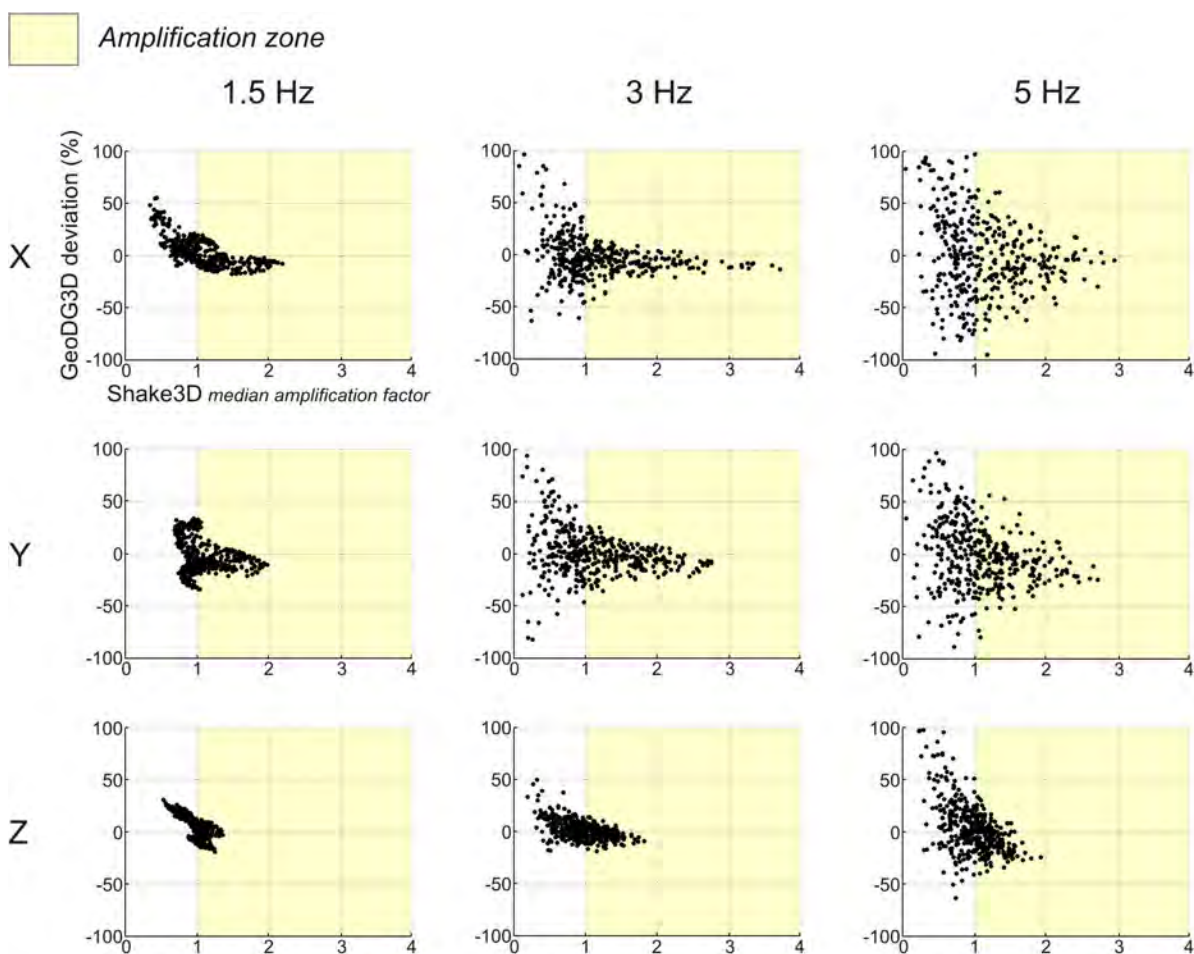


FIG. 3.27 – Comparaison des coefficients d’amplification topographique calculés dans le modèle de Rustrel par les méthodes DF et GD. D’après Maufroy (2010).

de contraindre ce modèle de vitesse, il est intéressant de comparer les données enregistrées et modélisées. C’est l’objectif des calculs que nous avons réalisés.

3.3.3 Construction du modèle

Les dimensions du modèle sont $1.4 \text{ km} \times 1.4 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ en xyz respectivement. Puisque nous ne disposons pas d’un modèle de vitesse V_S , nous avons considéré un coefficient de Poisson constant de 0.25 afin d’évaluer le modèle V_S (figure 3.30) à partir du modèle V_P . Nous obtenons alors des modèles où les vitesses varient de 660 m/s à 3800 m/s pour V_P et de 380 m/s à 2200 m/s pour V_S . De plus, nous avons considéré une densité constante égale à 2000 kg/m^3 . Des couches absorbantes de type CPML et d’épaisseur



FIG. 3.28 – Vue du volcan de la Soufrière (au centre) qui culmine à 1464 m. La photographie est orientée NO-SE (de gauche à droite) et s'étend sur environ 4 km (source IPGP).

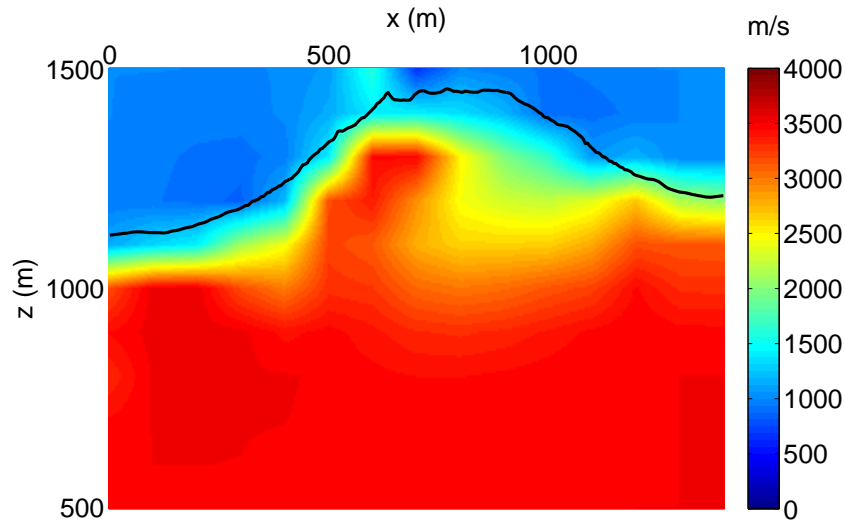


FIG. 3.29 – Coupe du modèle de vitesse V_P dans le plan xz au milieu du modèle (l'axe x correspond à la longitude). Ce modèle de vitesse a été obtenu par tomographie des temps de premières arrivées (Coutant *et al.*, 2010). La topographie est indiquée par une ligne noire.

300 m ont été ajoutées à chaque bord latéral du modèle. Par conséquent, les dimensions complètes du modèle numérique sont $2 \text{ km} \times 2 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ en xyz respectivement.

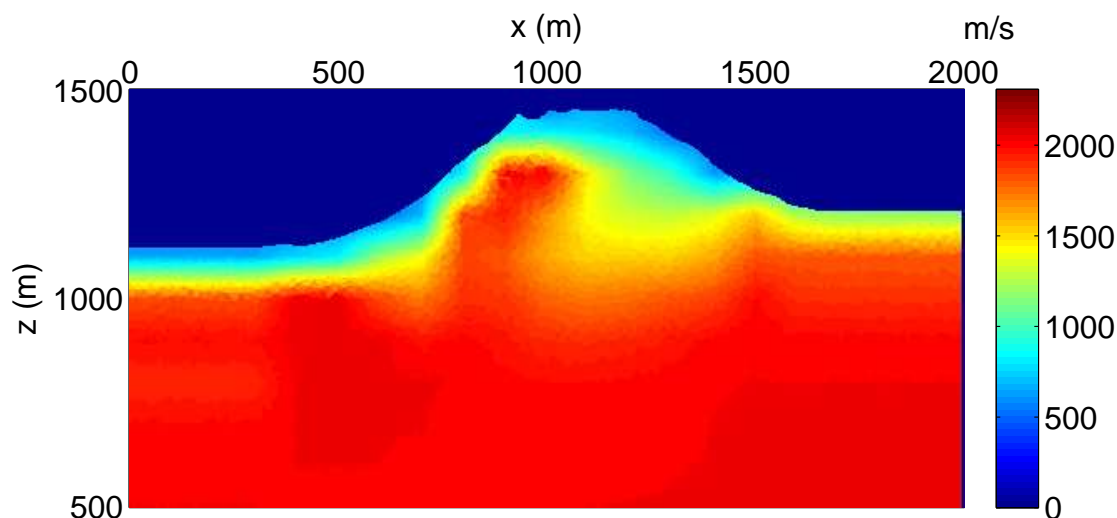


FIG. 3.30 – Coupe du modèle de vitesse V_S (projeté sur le maillage tétraédrique) dans le plan xz au milieu du modèle.

3.3.4 Construction du maillage

Le maillage a été obtenu avec l'outil TETGEN et le procédé de raffinement itératif afin d'obtenir un maillage adapté localement pour des éléments de type P_2 (3 éléments par λ_{min}) pour une fréquence maximum de 25 Hz. Pour la première itération, nous sommes partis d'un maillage homogène représenté sur la figure 3.31.

Au bout de la sixième itération de raffinement, les critères de discrétisation sont atteints et nous obtenons le maillage h -adaptatif dont une coupe est présentée dans la figure 3.32. On peut constater une analogie avec le modèle de vitesse V_S (figure 3.30) où les zones de fortes vitesses sont corrélées avec les parties du maillage où les éléments sont les plus grands. En revanche, proche de la surface libre, on trouve les éléments les plus fins.

La seconde étape du raffinement consiste à appliquer les critères d'adaptation en ordre. La figure 3.33 montre que l'adaptation en ordre ne se concentre pas dans des zones particulières comme cela était le cas pour les modèles du projet E-2VP. En effet, dans le modèle de la Soufrière, il n'y a pas de zone qui présente un fort contraste et nous observons une répartition diffuse des éléments P_1 qui représentent environ 2 % du maillage et seulement 7 éléments (sur plus de 4 millions) ont été rétrogradés en P_0 . Malgré le nombre relativement faible d'éléments rétrogradés, la p -adaptivité a permis de réduire le coût numérique de la modélisation d'un facteur 5 par rapport à une simulation

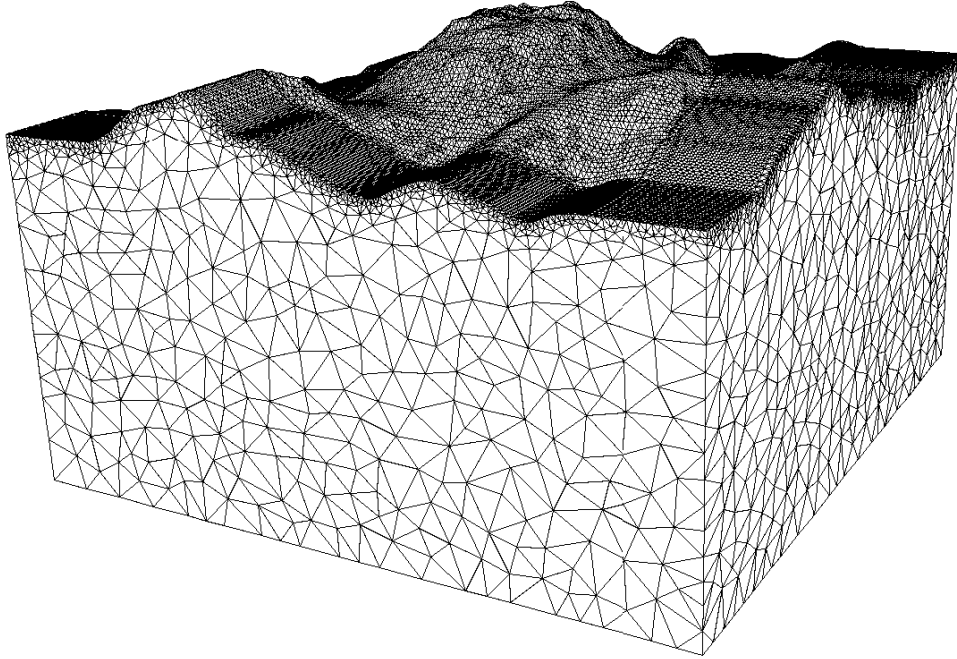


FIG. 3.31 – Vue du maillage à la première itération du procédé de raffinement. Une couche d'épaisseur 300 m a été ajoutée à chaque bord latéral du modèle pour les CPML.

à ordre constant avec des éléments de type P_2 .

3.3.5 Résultats numériques

Les calculs ont été réalisés sur la machine Blue Gene de l'IDRIS avec 512 processeurs (figure 3.34). Les statistiques relatives à ces calculs sont indiquées dans le tableau 3.4. La configuration de l'acquisition sismique est donnée sur la figure 3.35. Il s'agit d'un dispositif quasi-2D avec un profil selon la direction Est-Ouest qui comprend 100 récepteurs mono-composante (v_z) répartis tous les 10 m. La source est un tir de dynamite. Pour les simulations numériques, nous avons utilisé une source explosive avec une fonction Ricker de fréquence dominante 10 Hz (fréquence maximum 25 Hz). Nous présentons dans

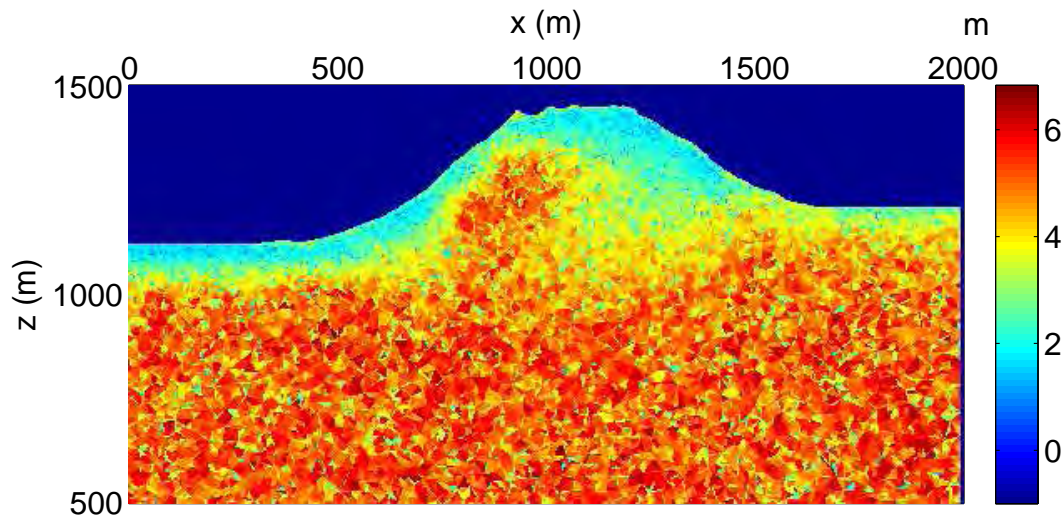


FIG. 3.32 – Coupe du maillage dans le plan xz au milieu du modèle montrant le rayon de la sphère inscrite dans chaque élément.

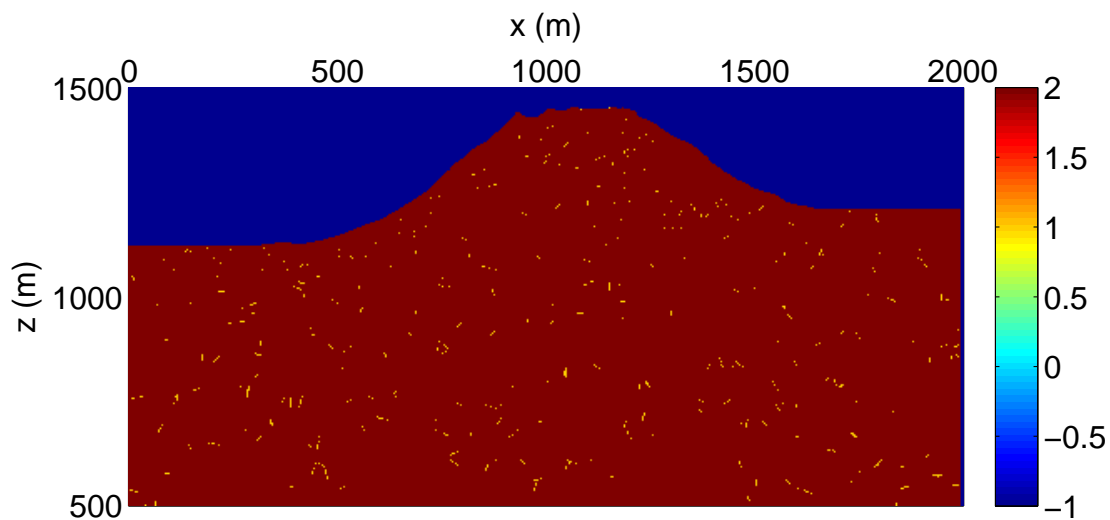


FIG. 3.33 – Coupe du maillage dans le plan xz au milieu du modèle montrant l'ordre d'approximation utilisé pour chaque élément. Rouge : P_2 ; Orange : P_1 ; Bleu clair : P_0 ; Bleu foncé : vide.

la figure 3.36 une comparaison entre les données réelles et les données calculées. Malgré les importantes approximations et incertitudes (fonction source inconnue, coefficient de Poisson constant, densité constante, absence d'atténuation, faible rapport signal sur bruit), on retrouve des similitudes frappantes dans les données. En particulier, les traces sismiques présentent des discontinuités bien marquées qui témoignent de forts contrastes

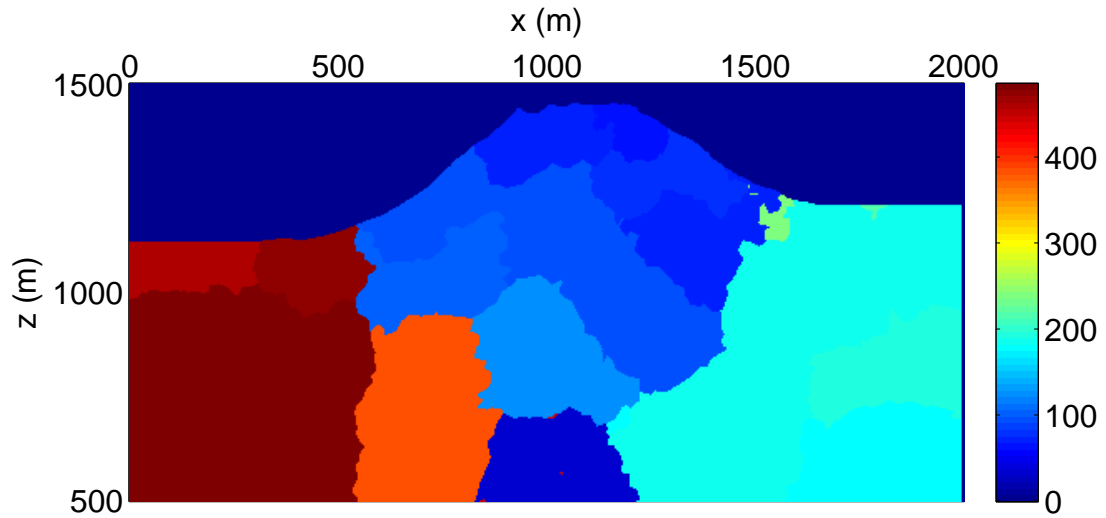


FIG. 3.34 – Coupe du maillage dans le plan xz au milieu du modèle montrant le partitionnement du maillage avec 512 sous-domaines.

TAB. 3.4 – Statistiques de la modélisation pour le modèle du volcan de la Soufrière effectuée sur la machine IBM BlueGene de l’IDRIS.

Temps de modélisation	5 s
Nb éléments	4.6 millions
Nb inconnues	414 millions
Min/Max longueur élément	1.29 - 58.62 m
Nb de pas en temps	37 787
Nb CPUs	512
Mémoire totale	10 GB
Mémoire par CPU	14 - 23 MB
Temps de calcul	6 h 45 min.
Temps / inconnue / pas en temps	0.79 μ s

de vitesse au sein du dôme de la Soufrière. Ces premiers résultats encourageants nécessitent une analyse plus poussée mais ils montrent l’intérêt de la modélisation complète des formes d’onde pour contraindre les modèles géologiques.

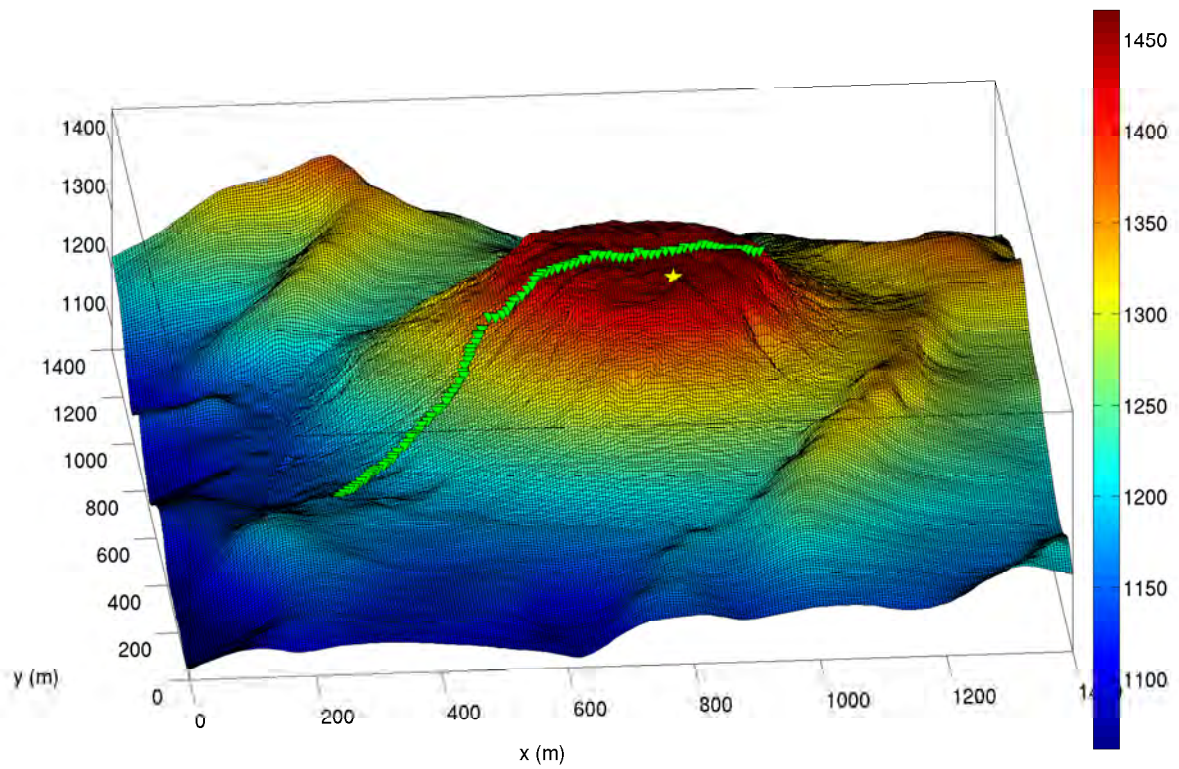


FIG. 3.35 – Topographie du volcan de la Soufrière. La position de la source est indiquée par une étoile jaune et les positions des 100 récepteurs avec des triangles verts.

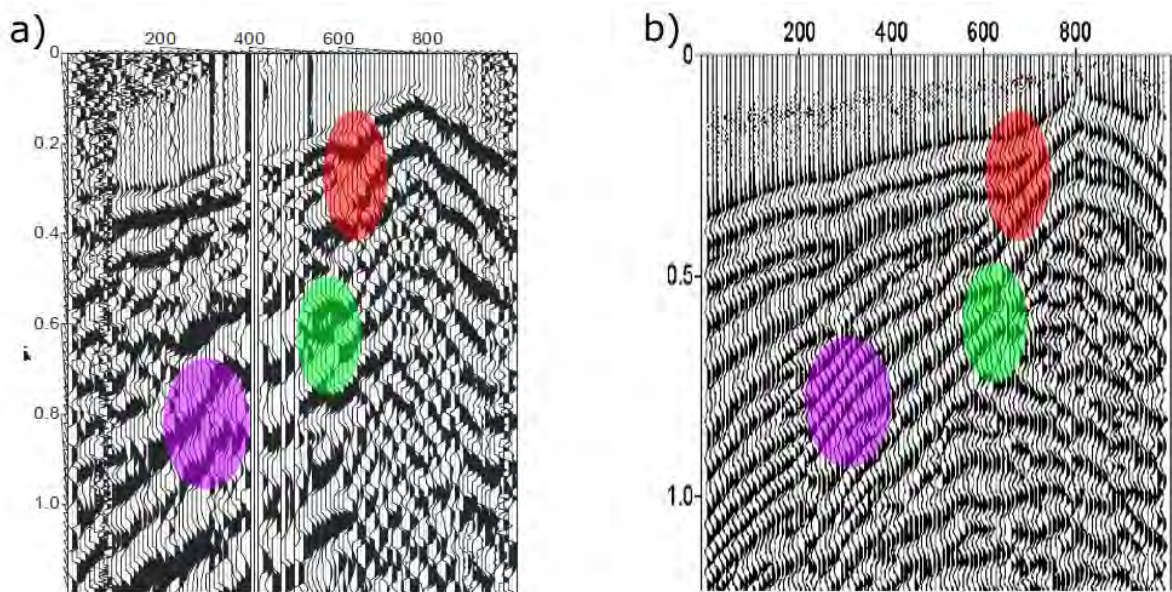


FIG. 3.36 – (a) Données réelles (composante v_z). Les données sont relativement bruitées en raison des conditions de terrain difficiles (en particulier des vents importants). (b) Données calculées (composante v_z). Certaines similitudes sont mise en évidence par les zones de couleur.

Deuxième partie

Inversion des ondes sismiques

Chapitre 4

Inversion des formes d'onde en domaine fréquentiel

Sommaire

4.1	Principes généraux, contexte et enjeux	164
4.1.1	Introduction	164
4.1.2	Un problème d'optimisation locale	165
4.1.3	Calcul du gradient et principe d'imagerie	166
4.1.4	Un problème inverse mal posé	171
4.1.5	Domaine temporel <i>versus</i> domaine fréquentiel	172
4.1.6	Historique de l'inversion des formes d'onde	176
4.1.7	Motivation de ce travail	179
4.2	Formulation du problème inverse en fréquence	180
4.2.1	Fonction coût	180
4.2.2	Linéarisation du problème inverse	181
4.2.3	Équations normales	182
4.2.4	Expression du gradient	182
4.3	Construction des gradients	184
4.3.1	Calcul des champs monochromatiques	184
4.3.2	Bénéfice de la formulation pseudo-conservative	192
4.3.3	Gradient de V_P	194
4.3.4	Gradient de V_S	198
4.3.5	Gradient de ρ	199
4.3.6	Recherche du pas de descente	200

4.1 Principes généraux, contexte et enjeux

4.1.1 Introduction

L'inversion complète des formes d'onde (FWI : *Full Waveform Inversion*) est une méthode d'imagerie sismique quantitative fondée sur la résolution d'un problème inverse (Tarantola, 1987; Virieux & Operto, 2009). Ce problème inverse consiste à minimiser une fonction coût (ou encore une fonctionnelle) qui représente l'écart (au sens d'une norme) entre les données sismiques enregistrées et les données sismiques modélisées dans un modèle du milieu a priori (généralement appelé modèle de départ ou modèle initial). La FWI est un processus itératif non-linéaire où le modèle initial est mis à jour à chaque itération. Les données enregistrées sont les sismogrammes associés à chaque couple source-récepteur de l'expérience sismique. Les résidus sont calculés en prenant par exemple, la différence, échantillon par échantillon, entre les données observées et les données calculées. De ce fait, l'ensemble des arrivées sismiques (incluant l'information sur la phase et l'amplitude) est impliqué dans le processus d'imagerie. A ce titre, on considère que la FWI est une méthode d'imagerie sismique qui tend à exploiter l'ensemble de l'information contenue dans les données sismiques. Pour modéliser l'ensemble de cette information (le problème direct), une solution complète de l'équation d'onde doit être calculée dans le modèle initial du milieu (par opposition, aux méthodes fondées sur l'approximation haute fréquence de la théorie des rais, sur l'approximation paraxiale *one-way* de l'équation d'onde et sur l'approximation en diffraction simple de l'approximation de Born). Les méthodes généralement utilisées pour des problèmes de dimension supérieure à 1 reposent sur des techniques de discrétisation de l'équation d'onde telles que celles que nous avons présentées au chapitre 1.1. L'équation d'onde est une EDP dont le terme de droite représente la source sismique et dont la solution est le champ d'onde estimé en tout point de l'espace et du temps. Les coefficients de l'EDP dépendent des propriétés du milieu que l'on souhaite imager. On peut donc définir la FWI comme l'estimation des coefficients d'une EDP à seconds membres multiples à partir des solutions connues en des positions limitées de l'espace correspondant aux positions des récepteurs sismiques.

La FWI prend tout son sens lorsqu'elle est appliquée à des dispositifs d'acquisition permettant d'enregistrer des phénomènes de propagation complexes (arrivées réfractées,

réflexions super-critiques, réflexions et diffractions multiples). Les dispositifs d'acquisition les plus adéquats sont les dispositifs d'entre-puits (Pratt & Worthington, 1990; Pratt & Gouly, 1991; Pratt, 1999) ou les acquisitions de surface bénéficiant de grands déports (Pratt *et al.*, 1996; Brenders & Pratt, 2007b) qui sont aujourd'hui largement développés dans l'industrie pétrolière. Les phénomènes de propagation complexes enregistrés à grands déport (ou grand angle) portent une information potentielle fondamentale sur les longueurs d'onde intermédiaires du milieu qu'il est possible de reconstruire par FWI (Mora, 1987, 1988, 1989; Jannane *et al.*, 1989; Pratt & Worthington, 1990; Neves & Singh, 1996; Sirgue & Pratt, 2004). Le modèle du milieu retourné par FWI peut être vu comme une représentation passe-bas du milieu, où le nombre d'onde de coupure est contrôlé par la fréquence maximale de la source. La résolution théorique maximale, dans l'approximation en diffraction simple, est la demi longueur d'onde (Sirgue & Pratt, 2004). La notion de super résolution engendrée par des phénomènes de diffractions multiples doit conduire potentiellement à une résolution supérieure, mais la capacité de la FWI à exploiter ces phénomènes complexes reste à établir.

4.1.2 Un problème d'optimisation locale

Le problème inverse est résolu par des techniques d'optimisation locale fondées sur le gradient de la fonction coût (Tarantola, 1987; Nocedal & Wright, 1999). Le modèle de perturbation recherché est celui pour lequel le gradient de la fonction coût est nul. Cela conduit, lorsque la norme des moindres carrés est utilisée, à l'expression suivante :

$$\Delta \mathbf{m} = - \left[\frac{\partial^2 C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}^{-1} \left[\frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}, \quad (4.1)$$

où C désigne la fonction coût, \mathbf{m}_0 est le modèle initial et $\Delta \mathbf{m}$ est le modèle de perturbation tel que le modèle recherché \mathbf{m} s'exprime par $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}$. Les dérivées seconde et première de la fonction coût, $\frac{\partial^2 C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2}$ et $\frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}}$, sont respectivement appelées le Hessian et le gradient de la fonction coût.

Il existe une variété d'algorithmes d'optimisation locale fondés sur des approximations du Hessian qui peuvent être utilisés. On peut mentionner les méthodes de plus grande pente préconditionnées par des approximations diagonales du Hessian (Shin *et al.*, 2001b; Ravaut *et al.*, 2004) (le modèle est recherché au voisinage du modèle initial dans la direction opposée au gradient via un pas de descente), les méthodes de gradients conjugués (Mora, 1987), les méthodes de Gauss-Newton (Askan & Bielak, 2008) et les méthodes de

quasi-Newton fondées sur la méthode L-BFGS (Brossier *et al.*, 2009; Brossier, 2010) ou de Newton (Epanomeritakis *et al.*, 2008) (voir Tarantola (1987); Pratt *et al.* (1998) pour une revue sur ces approches). La relation entre les données et les paramètres de l'équation d'onde étant non-linéaire, le problème inverse est par conséquent non-linéaire. Lorsque la norme des moindres carrés est utilisée, le processus d'optimisation locale consiste à chercher un modèle de perturbation au voisinage du modèle initial via un développement de Taylor de la fonction coût d'ordre deux. Cela revient à considérer que la fonction coût est localement quadratique (telle qu'elle le serait si le problème direct était linéaire). Pour compenser cette approximation locale, le problème inverse est résolu itérativement de manière non-linéaire (on parle d'inversion linéarisée). Le modèle final d'une itération est utilisé comme modèle initial pour l'itération suivante.

4.1.3 Calcul du gradient et principe d'imagerie

Le gradient de la fonction coût est un élément crucial des méthodes d'optimisation locale. Il existe deux grandes catégories d'approches pour le calculer. La première est fondée sur la construction explicite de la matrice de sensibilité ou matrice des dérivées de Fréchet (Chen *et al.*, 2007). Cette matrice équivaut à la dérivée des données modélisées par rapport aux paramètres du milieu que l'on recherche. Le gradient de la fonction coût s'exprime par la corrélation à décalage nul entre les résidus et les dérivées partielles des données par rapport aux paramètres du milieu. Pour cela, on résout un système d'équations reliant les résidus au modèle de perturbation via la matrice de sensibilité par une méthode de gradients conjugués (L-SQR). Cette formulation permet d'établir le lien qu'il existe entre la FWI et la tomographie en diffraction (Devaney, 1982; Wu & Toksöz, 1987; Gelius *et al.*, 1991; Sirgue & Pratt, 2004). Les résidus peuvent s'interpréter comme le champ d'onde manquant dans les données modélisées associé aux hétérogénéités manquantes dans le modèle (Tarantola, 1984; Pratt *et al.*, 1998). Dans le cadre de l'approximation de Born en diffraction simple, la dérivée partielle du champ d'onde par rapport à un paramètre du milieu représente le champ émis par la source primaire et diffracté par une source secondaire correspondant à un point diffractant associé au paramètre du modèle. Cette définition s'accorde avec celle des résidus qui peuvent être interprétés comme le champ diffracté par les hétérogénéités manquantes dans le modèle initial.

Le deuxième type d'approche est fondé sur la méthode de l'état adjoint qui est un formalisme mathématique pour calculer le gradient d'une fonctionnelle sans calculer ex-

pliquement la matrice de sensibilité (Lions, 1972; Chavent, 1974; Tromp *et al.*, 2005; Fichtner *et al.*, 2006a,b; Plessix, 2006; Chavent, 2009). C'est cette approche qui sera utilisée dans la suite de la thèse, comme c'est majoritairement le cas dans la communauté de l'exploration sismique. L'application de la méthode de l'état adjoint à la FWI conduit à une expression du gradient, extrêmement simple et d'implémentation efficace, obtenu par corrélation à décalage nul entre le champ incident émis par la source et le champ adjoint correspondant à la rétro-propagation temporelle des résidus dans le milieu. L'opération de corrélation à décalage nul du champ incident et du champ résiduel rétro-propagé a pour fonction de tester la correspondance des temps d'arrivée des deux champs en des positions de l'espace et ainsi de retrouver les positions des hétérogénéités du milieu ayant généré des résidus dans les données. Nous illustrons ce principe dans l'exemple qui suit. Nous considérons un milieu acoustique homogène ($V_P = 4000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$) de dimension infinie (une couche absorbante est appliquée en chaque bord) qui contient une hétérogénéité sphérique de diamètre 400 m avec une anomalie de vitesse positive ($V_P = 5000 \text{ m/s}$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$). La figure 4.1 montre des coupes horizontales et verticales du modèle V_P ainsi que la géométrie du dispositif d'acquisition. On utilise une ligne de 161 récepteurs et une source explosive. Nous effectuons une première modélisation du champ d'onde dans ce modèle (avec la méthode GD) et obtenons les sismogrammes en pression présentés dans la figure 4.2.a. Dans ces sismogrammes, nous pouvons observer une première arrivée due à l'onde directe et une seconde qui correspond à l'onde diffractée sur l'hétérogénéité. Ce jeu de sismogrammes va nous servir de données observées. Pour l'inversion de ces données, nous partons du modèle homogène sans l'hétérogénéité et nous calculons le champ incident qui donne les sismogrammes en pression de la figure 4.2.b. Les résidus présentés dans la figure 4.2.c ne contiennent plus que le train d'onde relatif à l'onde diffractée.

La figure 4.3 montre des instantanés des champs incident et rétro-propagé ainsi que le produit des deux champs au cours du temps. Pour calculer le champ rétro-propagé, nous injectons dans le milieu, en position des récepteurs, les résidus et effectuons une modélisation qui part du temps maximum vers $t = 0$ (on utilise un pas de temps négatif). On constate que le champ rétro-propagé est un champ qui 'remonte' le temps et dont le front se focalise autour de l'hétérogénéité¹ au même instant où le front du champ incident atteint cette dernière (pour $t = 0.5 \text{ s}$). Cette cohérence spatio-temporelle des deux champs se vérifie dans la colonne de droite de la figure (qui représente le produit

¹C'est le principe au coeur des procédés par renversement temporel. Dans cette expérience, l'ensemble des récepteurs constitue un miroir à renversement temporel (Fink, 1993) capable d'émettre un champ qui va se refocaliser à la source (ici l'hétérogénéité) (Larmat *et al.*, 2006; Etienne, 2007).

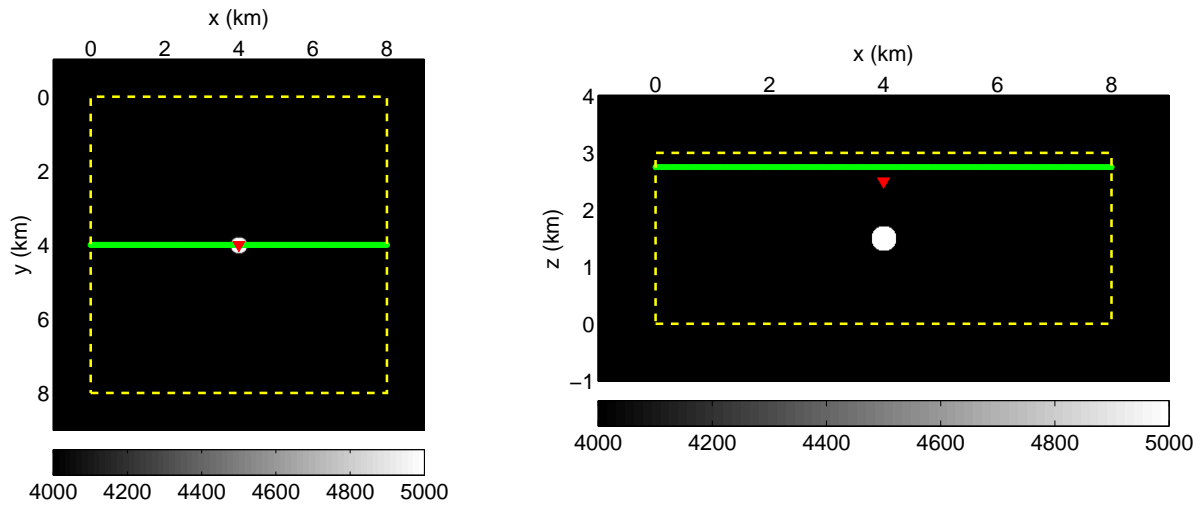


FIG. 4.1 – Coupes du modèle V_P selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite) qui passent par le centre de l'hétérogénéité. Les limites des couches absorbantes sont indiquées par les lignes pointillées jaunes, les positions des récepteurs en vert et la position de la source par le triangle rouge.

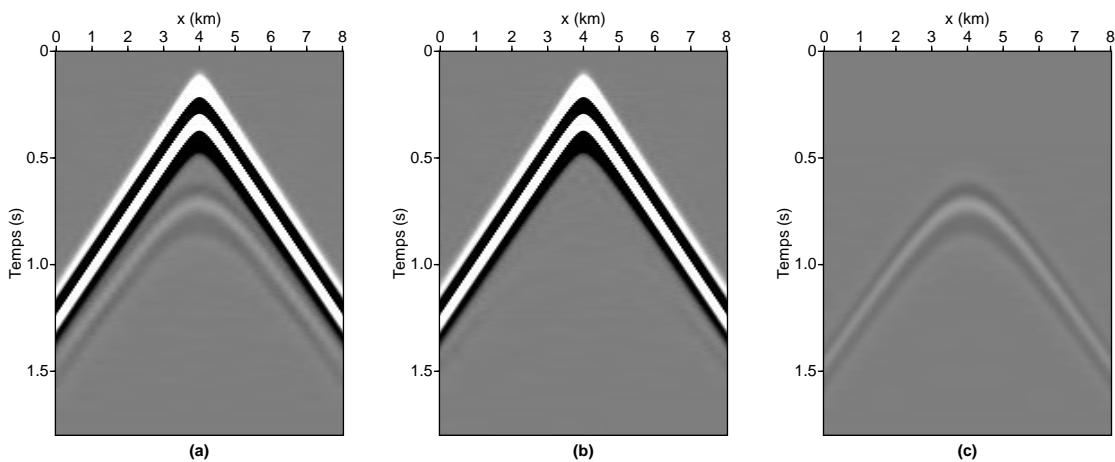


FIG. 4.2 – (a) Sismogrammes en pression calculés dans le vrai modèle (données observées). (b) Sismogrammes calculés dans le modèle homogène (données calculées). (c) Résidus.

du champ incident avec le champ rétro-propagé à chaque temps) où l'on observe une amplitude significative en lieu et place de l'hétérogénéité pour $t = 0.5$ s. Comme nous l'avons indiqué auparavant, dans le cadre des méthodes adjointes, le gradient s'obtient

par la corrélation des deux champs à décalage nul. Pour effectuer cette corrélation, il suffit de sommer les produits des champs pour chaque pas en temps (sommation des images de la colonne de droite de la figure 4.3) et l'on aboutit à l'image de la figure 4.4. L'amplitude maximale du gradient est bien localisée à proximité de l'hétérogénéité. De plus, nous observons des formes en arcs de cercle, symétriques par rapport à la source, qui résultent de l'ouverture limitée du système d'acquisition.

L'application de la méthode de l'état adjoint à la FWI, qui conduit à l'exploitation de la réciprocité spatiale des fonctions de Green, a permis à Lailly (1983, 1984) et Tarantola (1984) de reconnaître l'analogie entre le principe d'imagerie de la FWI et celui de la migration par renversement temporel (RTM : *Reverse Time Migration*) énoncé la première fois par Claerbout (1971). Le gradient obtenu à la première itération de la FWI correspond schématiquement au résultat d'une migration RTM (excepté qu'en RTM, on rétro-propage les données, alors qu'en FWI, on rétro-propage les résidus).

Bien entendu, la cohérence spatio-temporelle des champs incident et rétro-propagé n'est garantie que si le modèle initial est suffisamment précis. On considère généralement, dans le cadre de l'approximation de Born, que le modèle initial doit être suffisamment précis d'un point de vue cinématique pour prédire le temps d'arrivée d'un signal avec une erreur n'excédant pas une demi-période du signal (en raisonnant sur des signaux monochromatiques comme on peut le faire quand la FWI est développée dans le domaine des fréquences) (Beydoun & Tarantola, 1988; Woodward, 1992). Dans le cas contraire, le processus d'optimisation va ajuster les données modélisées à une ou plusieurs périodes près. Cela conduit à un modèle erroné bien que la fonction coût soit réduite. Ce type d'artefact est appelé saut de phase (*cycle skipping*).

L'inversion des temps de première arrivée a été proposée pour construire un modèle initial pour la FWI à la fois pour la sismique d'entre-puits (Pratt & Gouly, 1991; Dessa & Pascal, 2003) mais également pour l'imagerie à l'échelle crustale et lithosphérique (Pratt *et al.*, 1996; Ravaut *et al.*, 2004; Operto *et al.*, 2006; Brenders & Pratt, 2007b). La résolution spatiale de l'inversion des temps de première arrivée correspond à la largeur de la première zone de Fresnel égale à $\sqrt{\lambda d}$ où λ est la longueur d'onde associée à la fréquence dominante et d est le déport source-récepteur (Williamson, 1991; Williamson & Worthington, 1993). Pour des applications crustales, la largeur de la première zone de Fresnel est de l'ordre de quelques kilomètres (Pratt *et al.*, 1996). La résolution théorique de la FWI est la demi longueur d'onde dont l'ordre de grandeur est quelques centaines de mètres. A ces échelles d'exploration crustale et lithosphérique, le gain en résolution escompté est par conséquent d'un ordre de grandeur.

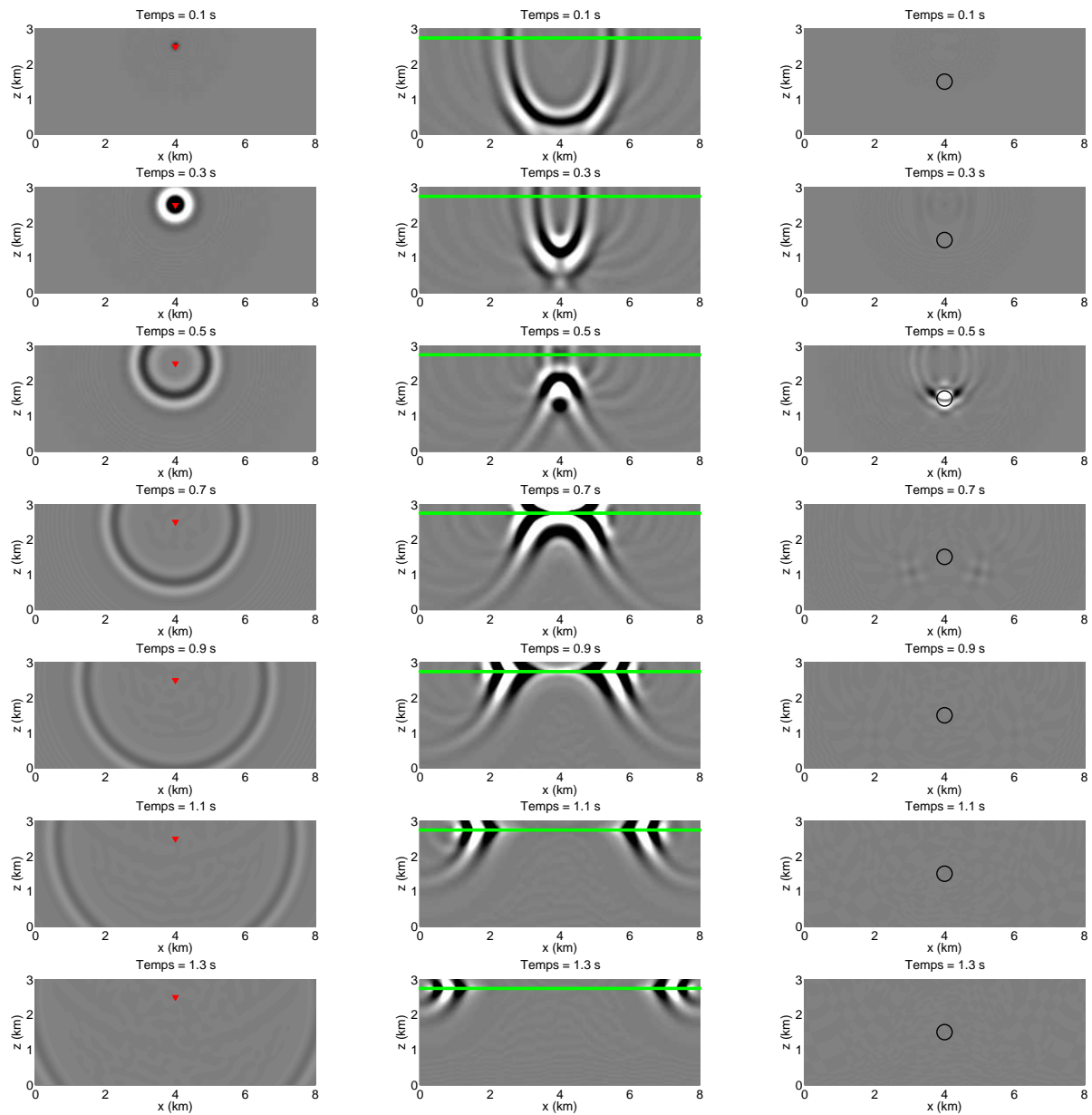


FIG. 4.3 – Colonne de gauche : instantanés du champ de pression incident issu de la source explosive (triangle rouge). Le temps est indiqué au dessus de chaque instantané et le plan de visualisation est le plan xz qui passe au centre de l'hétérogénéité. Colonne du milieu : Idem avec le champ de pression engendré par la rétro-propagation des résidus émis depuis la position des récepteurs (ligne verte). Colonne de droite : produit du champ incident et du champ rétro-propagé. Le contour de l'hétérogénéité est représenté par un cercle noir.

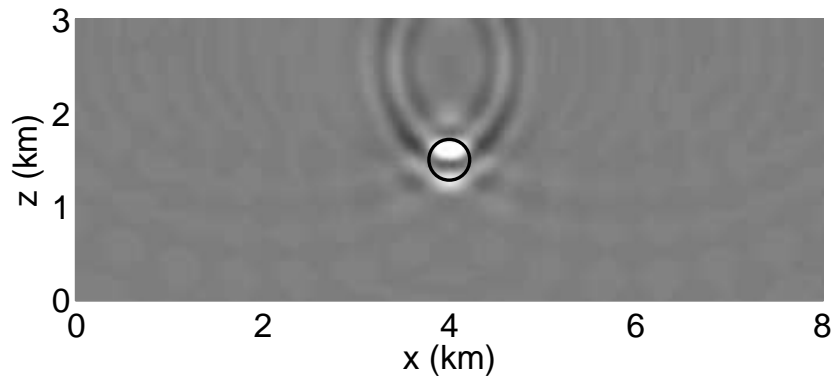


FIG. 4.4 – Cumul des produits du champ incident et du champ rétro-propagé calculés à chaque pas en temps. Le contour de l’hétérogénéité est représenté par un cercle noir.

4.1.4 Un problème inverse mal posé

La non-linéarité du problème inverse conduit à un problème mal posé au sens de la non-unicité de la solution (Hadamard, 1902). Une infinité de modèles permettent d’expliquer les données de manière comparable ; ce qui se traduit par la présence de plusieurs minimums locaux dans la fonction coût. Le caractère mal posé du problème inverse résulte du bruit dans les données et fondamentalement de la bande passante limitée des sources sismiques et de l’extension spatiale limitée des dispositifs d’acquisition qui ne fournissent qu’un éclairage incomplet du milieu. Le caractère incomplet des données nécessite la définition d’un modèle initial suffisamment proche du modèle final pour éviter la convergence vers un minimum local de la fonction coût. La définition et la construction de ce modèle initial est une question majeure en FWI. L’apport théorique des grandes ouvertures ou des grands déports pour reconstruire les longueurs d’onde intermédiaires du milieu a été évoqué au début de ce chapitre. En pratique, ces grandes ouvertures introduisent néanmoins un niveau accru de non-linéarité dans l’inversion car les ondes sismiques, en se propageant sur un nombre plus élevé de longueurs d’onde, deviennent plus sensibles aux imprécisions du modèle initial. C’est la raison pour laquelle certains auteurs préconisent prioritairement l’acquisition de basses fréquences pour réduire la sensibilité au modèle initial (Sirgue, 2006). Alternativement, différents niveaux de pré-conditionnement des données peuvent se concevoir pour injecter progressivement dans l’inversion la partie la plus non-linéaire des données. Parmi ces stratégies, la plupart opèrent hiérarchiquement sur des sous-ensembles de données au pouvoir de résolution ou au pouvoir de pénétration croissant telles que l’inversion successive de fréquences croissantes (Operto *et al.*, 2004; Brenders & Pratt, 2007a), l’inversion d’événements par-

ticuliers localisés en temps ou sélectionnés en fonction de l'angle d'ouverture (Sheng *et al.*, 2006; Brossier *et al.*, 2009; Shin & Ha, 2009) ou l'inversion de sous-ensembles de données sélectionnés en fonction du déport source-capteur (Shipp & Singh, 2002).

Les propriétés du milieu peuvent être décrites par une ou plusieurs classes de paramètres, en fonction des approximations que l'on juge acceptables dans un contexte applicatif particulier. Dans l'approximation visco-élastique, ces propriétés peuvent englober les vitesses de propagation des ondes P et S, la densité, les facteurs d'atténuation des ondes P et S et les paramètres anisotropes tels que les paramètres de Thomsen δ et ϵ pour les milieux transverses isotropes. La non-unicité de la solution augmente avec le nombre de classes de paramètres à estimer car il existe potentiellement des indéterminations entre paramètres en fonction de l'angle d'ouverture avec lequel l'onde sismique échantillonne le milieu (Tarantola, 1986; Ribodetti & Virieux, 1996; Forgues & Lambaré, 1997; Lee *et al.*, 2008). Définir le nombre et les combinaisons pertinentes de paramètres à reconstruire pour une application particulière, ainsi que la manière de reconstruire ces différentes classes de paramètres (conjointe ou hiérarchique), est une autre question majeure dans le cadre de la FWI.

4.1.5 Domaine temporel *versus* domaine fréquentiel

Initialement, la FWI a été formulée dans le domaine temporel ; les données étant une collection de sismogrammes contenant l'ensemble des arrivées sismiques en fonction du temps de propagation depuis le temps d'émission de la source (Kolb *et al.*, 1986; Gauthier *et al.*, 1986). Alternativement, une transformée de Fourier peut être appliquée à chaque sismogramme, pour représenter les données sismiques par les coefficients de la série de Fourier. La FWI dans le domaine fréquentiel consiste alors à minimiser l'écart entre un ou plusieurs de ces coefficients associés à un nombre discret de fréquences du signal (Pratt & Worthington, 1990). L'approche fréquentielle a été initialement proposée par le Professeur G. Pratt et collaborateurs. La motivation principale était de se placer dans le domaine optimal pour concevoir une approche multi-échelles de la FWI, procédant de manière hiérarchique de l'inversion des basses fréquences vers celle des hautes fréquences, dans le but de diminuer le caractère mal posé de l'inversion. En effet, les basses fréquences sont moins sensibles que les hautes fréquences aux problèmes de saut de phase précédemment évoqués car leurs périodes sont plus élevées. Comme on peut le comprendre intuitivement, les basses fréquences vont contrôler la reconstruction des grandes longueurs du milieu tandis que les plus hautes fréquences vont progressivement

contribuer à reconstruire de plus courtes longueurs d'onde. L'approche hiérarchique procédant des basses fréquences vers les hautes fréquences définit ainsi une approche multi-échelles dans sa capacité à injecter progressivement des perturbations de plus courtes longueurs d'onde dans le milieu. Cette approche hiérarchique est illustrée par les figures 4.5 et 4.6 qui montrent des applications de FWI à 2D avec l'approximation acoustique dans un cas synthétique et un cas réel respectivement.

Il faut noter que des approches hiérarchiques comparables ont également été développées dans le domaine temporel par inversion successive de sous-ensembles de données avec un contenu fréquentiel croissant (Kolb *et al.*, 1986; Bunks, 1992). Néanmoins, la propriété de localisation spectrale dans le domaine fréquentiel fournit un cadre plus flexible pour concevoir cette approche multi-échelles.

La deuxième motivation historique associée à la résolution du problème inverse en domaine fréquentiel est davantage liée à l'efficacité de l'algorithme d'inversion en terme de temps de calcul (Sirgue & Pratt, 2004; Brenders & Pratt, 2007a). On peut montrer via une analyse de résolution de la FWI que seules quelques fréquences discrètes sont nécessaires pour correctement échantillonner les paramètres du milieu dans le domaine spatial si le dispositif d'acquisition dispose d'un éclairage angulaire suffisant. L'éclairage angulaire définit l'angle de diffraction associé à une onde sismique diffractée par une hétérogénéité. En effet, les fréquences et les ouvertures angulaires ont un contrôle redondant sur l'échantillonnage des fréquences spatiales (ou des nombres d'onde) du milieu à reconstruire. Si la couverture des ouvertures angulaires est suffisamment large, telle que celle fournie par des dispositifs entre-puits ou des dispositifs de surface à grands dépôts, on peut alors théoriquement envisager de décimer l'échantillonnage en fréquence pour réduire la redondance de la couverture des nombres d'onde sans altérer la qualité du modèle reconstruit (à condition d'avoir un bon rapport signal sur bruit dans les données). Les inversions en domaine fréquentiel sont par conséquent généralement appliquées à des volumes de données réduits associés à un nombre limité de fréquences discrètes. Pour des problèmes 2D, la modélisation sismique peut être effectuée efficacement pour ces quelques fréquences et pour un grand nombre de sources en résolvant l'équation d'onde dans le domaine fréquentiel par des techniques d'élimination de Gauss faisant appel à des solveurs directs (factorisation LU avec phases de substitution) (Amestoy *et al.*, 2006). En revanche, ces conclusions ne se généralisent pas au cas 3D dans le cadre de l'approximation élastique, justifiant l'implémentation du problème direct en domaine temporel (Etienne *et al.*, 2008).

Enfin, une troisième motivation associée au domaine fréquentiel est la prise en compte

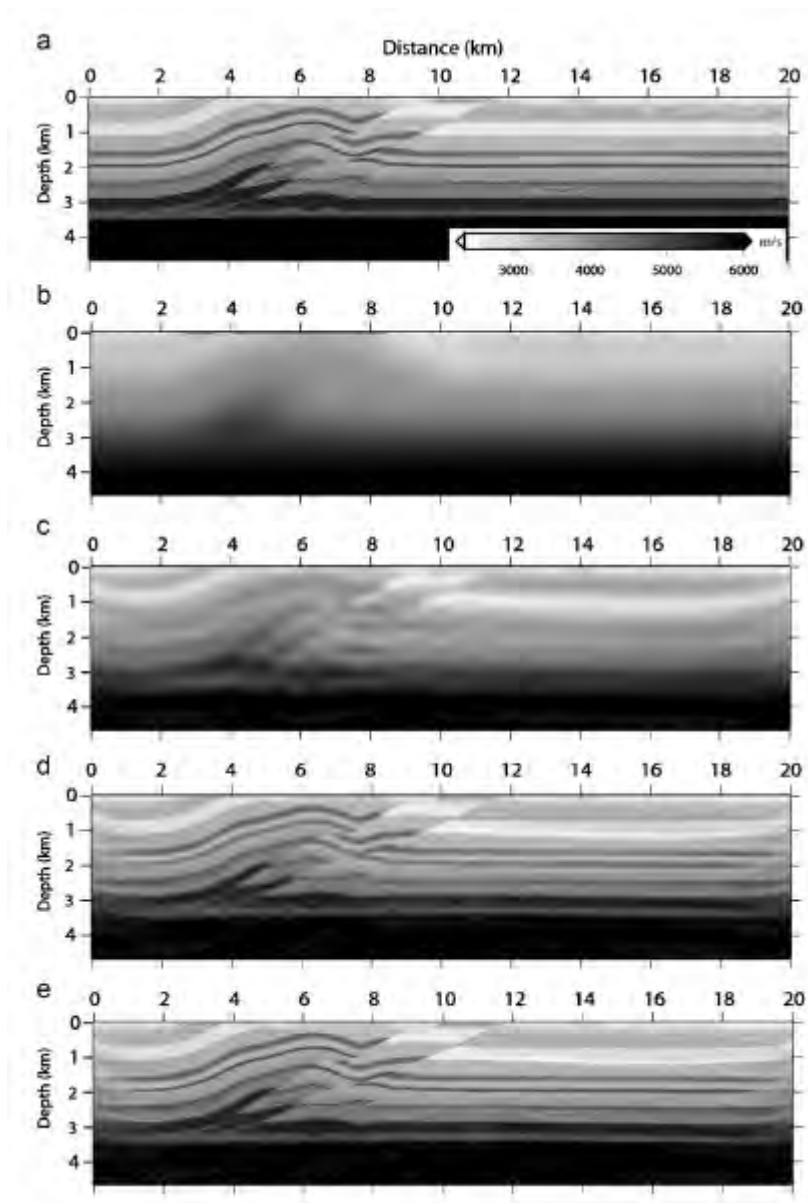


FIG. 4.5 – Inversion successive de fréquences croissantes : (a) Le modèle synthétique SEG/EAGE Overthrust (vitesse V_P). (b) Modèle initial pour la FWI obtenu par un lissage du vrai modèle. (c) Modèle V_P reconstruit avec une inversion à 3.5 Hz. (d) Modèle obtenu à 9.2 Hz. (e) Modèle final obtenu à 20.6 Hz. D’après Sourbier *et al.* (2009).

d’effets d’atténuation dans le problème direct qui est plus aisée à réaliser en domaine fréquentiel via l’utilisation de vitesses complexes (Toksöz & Johnston, 1981).

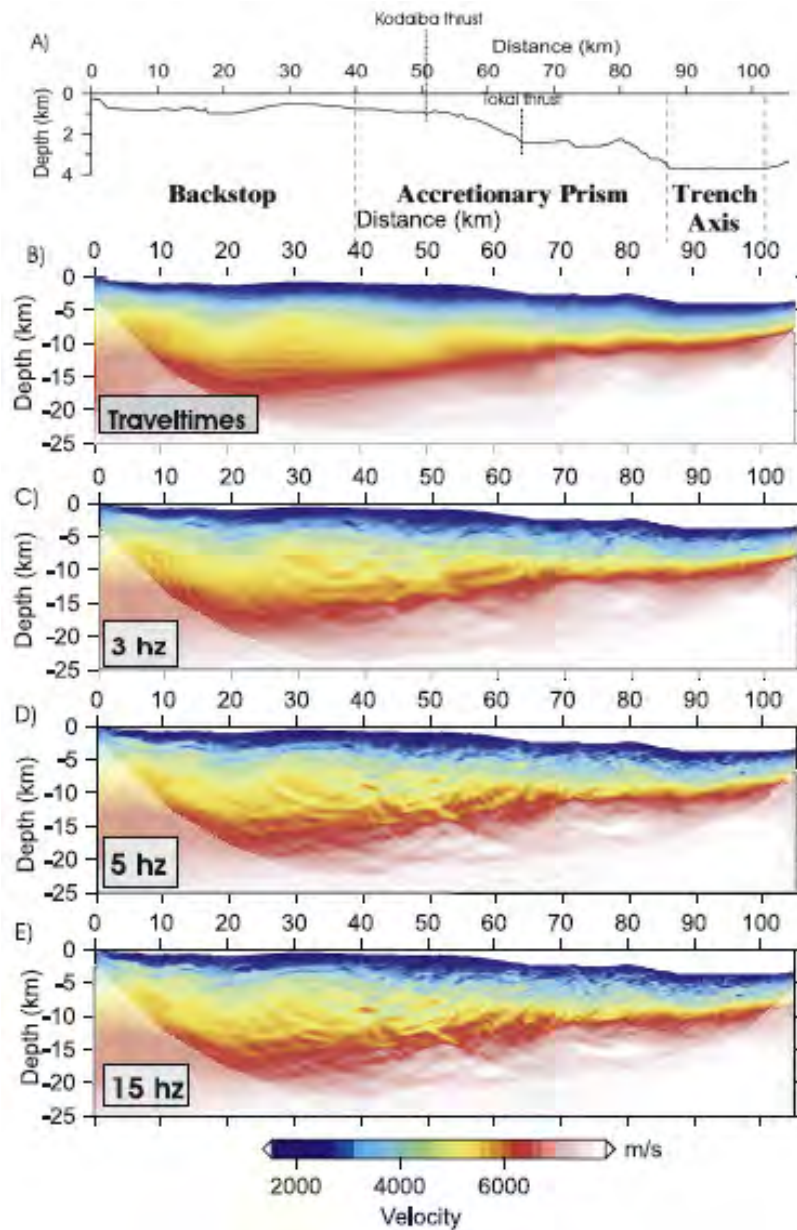


FIG. 4.6 – (a) Principales structures du système de subduction dans la zone de Nankai (Japon). (b) Tomographie des temps de première arrivée qui sert de modèle initial (vitesse V_P) pour la FWI. (c) Modèle V_P reconstruit avec une inversion à 3 Hz. (d) Modèle obtenu à 5 Hz. (e) Modèle final obtenu à 15 Hz. D'après Operto *et al.* (2006).

4.1.6 Historique de l'inversion des formes d'onde

4.1.6.1 Les premiers pas

La FWI appliquée à des problèmes multi-dimensionnels (2D et 3D) a réellement pris son essor lorsque Lailly (1983, 1984) et Tarantola (1984) ont simultanément reconnu l'analogie entre la FWI et le principe d'imagerie de la migration fondé sur le principe de correspondance des temps entre les champs d'onde incidents et rétro-propagés. Ce principe d'imagerie conduit à un calcul efficace du gradient de la fonction coût nécessitant seulement deux modélisations par source (une pour modéliser le champ incident et une seconde pour calculer le champ adjoint rétro-propagé). Parallèlement aux approches 2D fondées sur la méthode de l'état adjoint, des méthodes d'inversion pour les milieux stratifiés ont été développées avec une construction explicite de la matrice de sensibilité. Ces approches sont fondées sur une modélisation des ondes utilisant l'approximation haute fréquence WKBJ (Chapman & Orcutt, 1985; Shaw & Orcutt, 1985; Cary & Chapman, 1988) ou sur la méthode de la réflectivité dans le domaine tau-p (Dietrich & Kormendi, 1990; Kormendi & Dietrich, 1991; Sen & Stoffa, 1991; Minshull *et al.*, 1994; Sen & Stoffa, 1995; Collier & Singh, 1997; De Barros & Dietrich, 2008; De Barros *et al.*, 2010). Les non-linéarités constatées ont conduit certains auteurs à explorer des approches d'inversion semi-globales avec des méthodes de recuit simulé ou d'algorithmes génétiques (Cary & Chapman, 1988; Sen & Stoffa, 1991, 1995), tandis que l'application de l'inversion des formes d'onde à des milieux de rhéologie complexe a permis de mettre en évidence les problèmes de couplage entre différentes classes de paramètres (De Barros & Dietrich, 2008; De Barros *et al.*, 2010).

Les applications 2D pionnières de FWI ont été effectuées dans le cadre de l'approximation élastique. Bien que Gauthier *et al.* (1986); Mora (1987, 1988) aient reconnu, à l'aide de tests synthétiques, l'apport potentiel des arrivées transmises, les premières applications de FWI à des cas d'étude réels ont été réalisés sur des données de sismique en réflexion où les ondes réfractées étaient éliminées lors du pré-traitement (comme c'est le cas lorsque des méthodes de migration sont considérées) (Crase *et al.*, 1990, 1992). Dans ce type de données (dispositifs de sismique réflexion avec un déport limité), l'information sur les longueurs d'onde intermédiaires n'est pas présente (Jannane *et al.*, 1989). L'application à des dispositifs d'acquisition inadaptés, associée à un coût de calcul prohibitif pour les moyens de calcul disponibles dans les années 80-90, ont probablement contribué à conclure provisoirement que la FWI n'était pas une technique suffisamment aboutie pour envisager une utilisation exhaustive sur des cas d'étude réels.

4.1.6.2 Émergence de l’approche fréquentielle

Les travaux de G. Pratt et collaborateurs sur l’approche fréquentielle ont permis de ressusciter un intérêt pour les méthodes de FWI grâce à la conception d’algorithmes performants dans le domaine fréquentiel, à l’utilisation de l’approximation acoustique et à des applications pertinentes à des dispositifs adaptés d’entre-puits (Pratt & Worthington, 1990; Pratt & Gouly, 1991; Pratt, 1999). En proposant des algorithmes efficaces fondées sur l’inversion de quelques fréquences discrètes (Sirgue & Pratt, 2004), ces auteurs ont rétabli l’apport des composantes grand-angles dans les données pour reconstruire les longueurs d’onde intermédiaires du milieu et pour bénéficier d’une forte redondance de la couverture des nombres d’onde dans l’espace des modèles.

4.1.6.3 Un champ de recherche actif

La plupart des applications réalisées lors de la dernière décennie ont été effectuées dans le cadre de l’approximation acoustique où seule la vitesse de propagation des ondes P est reconstruite. Les résultats prometteurs obtenus sur des benchmarks ”aveugles” (Zelt *et al.*, 2005; Brenders & Pratt, 2007b; Pratt, 2008) ainsi que les premières applications pertinentes sur des cas d’étude réels impliquant des milieux géologiques complexes et des dispositifs grand-angles de surface (Ravaut *et al.*, 2004) ont définitivement relancé un champ de recherche actif sur la FWI au sein des communautés académiques et industrielles. Dès lors, un certain nombre d’applications de FWI ont été présentées majoritairement dans le cas de l’approximation acoustique 2D mono-paramètre (Operto *et al.*, 2006; Gao *et al.*, 2006b,a; Bleibinhaus *et al.*, 2007; Malinowsky & Operto, 2008; Jaiswal *et al.*, 2008, 2009).

4.1.6.4 Vers une imagerie 3D multi-paramètres

Actuellement, la faisabilité de la FWI à 3D dans le cadre de l’approximation acoustique a été démontrée à basses fréquences (inférieures à 10 Hz) (Ben Hadj Ali *et al.*, 2008; Vigh & Starr, 2008; Plessix, 2009; Sirgue *et al.*, 2010; Plessix & Perkins, 2010). Des applications remarquables ont été effectuées par l’industrie pétrolière, notamment sur le champ pétrolifère de Valhall en Mer du Nord (figure 4.7) à partir de dispositifs grand-angles composés de câbles de fond de mer (Sirgue *et al.*, 2010). La qualité des résultats obtenus comparativement à ce qui avait pu être obtenu jusqu’alors suggère fortement le bénéfice tiré par la FWI des dispositifs grand-angles et grand-azimuts.

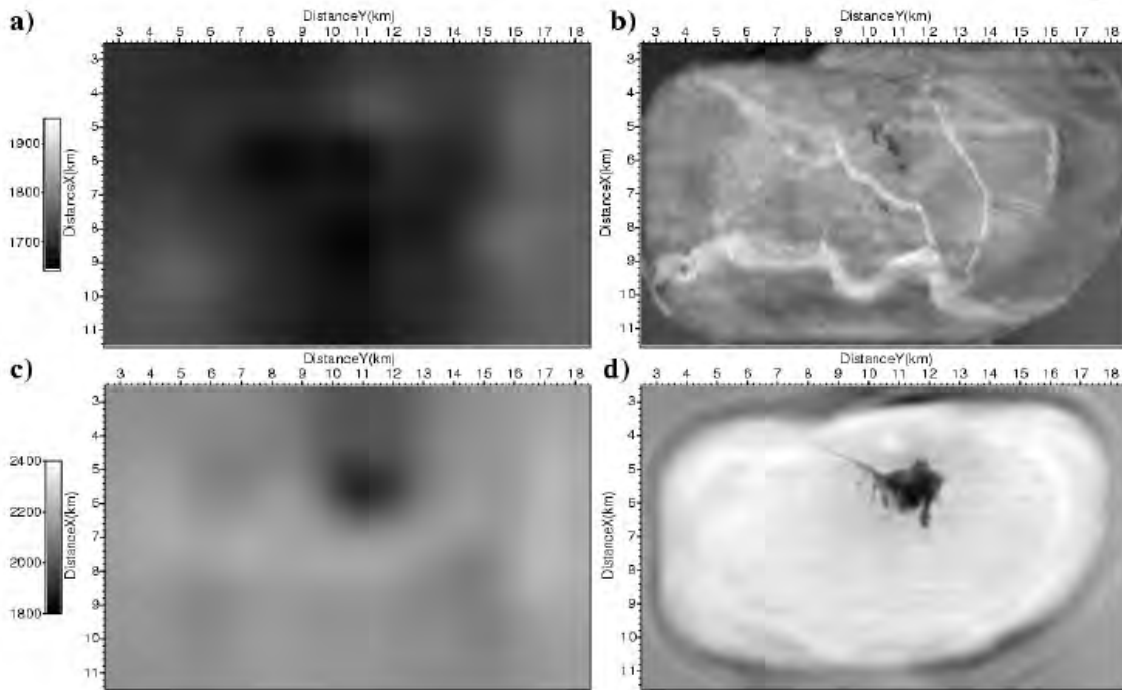


FIG. 4.7 – Application de FWI à 3D avec l'approximation acoustique sur le champ pétrolier de Valhall. (a) Coupe horizontale à une profondeur de 150 m du modèle de vitesse obtenu par tomographie des temps de première arrivée qui sert de modèle initial à la FWI. (b) Coupe à la même profondeur du modèle obtenu par FWI dans le domaine fréquentiel jusqu'à 7 Hz. (c) et (d) Idem (a) et (b) pour une profondeur de 1050 m. La zone sombre correspond au toit d'un réservoir d'hydrocarbure. D'après Sirgue *et al.* (2009).

Dans le contexte actuel, plusieurs axes de recherche semblent émerger :

Le premier a pour but de réduire le coût numérique de la FWI à 3D en utilisant des techniques d'encodage aléatoire ou déterministe et d'assemblage des sources sismiques pour réduire le nombre de simulations à chaque itération du processus d'inversion (Krebs *et al.*, 2009; Ben Hadj Ali *et al.*, 2009; Herrmann *et al.*, 2009; Gao *et al.*, 2010).

Le deuxième axe de recherche a pour objectif la réduction de la non-linéarité du problème inverse soit en enregistrant des basses fréquences (Plessix *et al.*, 2010), soit en développant des modèles initiaux plus précis. Dans le deuxième cas, citons parmi les approches explorées récemment : l'inversion des formes d'onde dans les domaines de Laplace et de Laplace-Fourier (Shin & Ha, 2008; Shin & Cha, 2008; Shin & Ha, 2009), la stéréo-tomographie en réflexion et en transmission fondée sur le pointé d'événements

localement cohérents dans les données (Prioux *et al.*, 2010) et l'utilisation de techniques de déroulement de la phase à basse fréquence dans le domaine source-récepteur (Shah *et al.*, 2010).

Le troisième axe de recherche vise à prendre en compte, de manière plus précise que l'approximation acoustique, l'influence des différents paramètres physiques sur la propagation des ondes. Parmi les principaux paramètres, on retrouve les paramètres élastiques isotropes (Gelis *et al.*, 2007; Sears *et al.*, 2008; Brossier *et al.*, 2009), l'atténuation (Hicks & Pratt, 2001; Shi *et al.*, 2007; Askan *et al.*, 2007; Pratt *et al.*, 2005; Malinowsky *et al.*, 2007; Kamei & Pratt, 2008) ou encore l'anisotropie (Barnes *et al.*, 2008; Lee *et al.*, 2008; Pratt *et al.*, 2008). La prise en compte de la physique des ondes par la FWI requiert la reconstruction de plusieurs classes de paramètres qu'il est important d'identifier de manière à minimiser les couplages entre plusieurs classes de paramètres. De plus, il est généralement admis que la FWI pose des problèmes à haute fréquence à cause des imprécisions sur la modélisation des champs d'onde qui deviennent préjudiciables sur la convergence (Mulder & Plessix, 2008; Barnes & Charara, 2009). Aussi, la capacité des méthodes de FWI à exploiter le contenu haute fréquence des données sismiques (indépendamment du coût numérique que cela induit) via une prise en compte plus précise de la propagation des ondes, ainsi que la reconstruction de plusieurs classes de paramètres, sont actuellement des sujets de recherche majeurs sur les méthodes de FWI.

L'historique dressé ci-dessus a passé en revue les recherches majoritairement entreprises par la communauté de la prospection pétrolière. Depuis peu, la communauté sismologique a développé des approches adjointes pour calculer des noyaux de sensibilité fondés sur des fonctions de Green calculées par la méthode des ES (Liu & Tromp, 2006; Fichtner, 2010). Ces noyaux sont utilisés pour inverser la phase de quelques arrivées sismiques sélectionnées en prenant en compte la nature finie du spectre des données. Ces approches ont notamment été appliquées à l'imagerie du bassin de Los Angeles (Tape *et al.*, 2009, 2010). Une approche plus complète, implémentée dans le domaine temps-fréquence, a été développée par Fichtner *et al.* (2008, 2009, 2010) pour appliquer la FWI aux échelles continentales et globales.

4.1.7 Motivation de ce travail

Ce travail s'inscrit dans le dernier axe de recherche décrit précédemment. Dans le but d'explorer les capacités de la FWI à 3D, nous avons eu comme objectif le développement d'un outil d'une part, adapté aux milieux élastiques à 3D, et d'autre part, flexible en

ce qui concerne les applications. Dans l'optique de pouvoir exploiter cet outil dans des contextes géologiques variés, nous avons imaginé une implémentation originale de la FWI permettant de choisir la méthode numérique de résolution du problème direct et d'adapter la discrétisation de l'inversion en fonction des milieux étudiés. Les concepts sous-jacents, ainsi que des exemples d'applications dans des cas synthétiques simples, feront l'objet du chapitre 5.

Nous avons fait le choix de développer le problème inverse en domaine fréquentiel, bien que le problème direct soit implémenté en domaine temporel comme cela a été initialement proposé par Sirgue *et al.* (2008). Cela permet de considérer des volumes de données réduits associés à un nombre limité de composantes fréquentielles et de concevoir des algorithmes multi-échelles optimaux par inversions successives de quelques fréquences croissantes. Nous tirons par ailleurs profit de la modélisation en domaine temporel pour extraire simultanément et de manière efficace le nombre de fréquences estimé nécessaire lors d'une itération de la FWI. Nous pouvons également effectuer un fenêtrage temporel des événements sismiques particuliers que l'on souhaite inclure dans l'inversion. En résumé, l'algorithme hybride comprenant une modélisation dans le domaine temporel et une inversion dans le domaine fréquentiel fournit un cadre adapté pour implémenter deux niveaux hiérarchiques temps-fréquence dans l'algorithme FWI : le premier, par inversions hiérarchiques de fréquences croissantes et le second, par inversions hiérarchiques des arrivées sismiques en fonction du temps d'arrivée. Dans la suite, nous introduisons le formalisme de la FWI dans le domaine fréquentiel que nous avons utilisé.

4.2 Formulation du problème inverse en fréquence

4.2.1 Fonction coût

On définit le vecteur des résidus comme suit :

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{d}_{\text{cal}}(\mathbf{m}), \quad (4.2)$$

où \mathbf{d}_{obs} et \mathbf{d}_{cal} sont respectivement les données observées et calculées (dans le domaine fréquentiel). La taille de ce vecteur correspond au nombre de données N_d égal au nombre de sources multiplié par le nombre de récepteurs et par le nombre de composantes enregistrées. Pour les acquisition sismique 3D, le nombre maximal de composantes est 4 (cas des OBS, avec 3 composantes de vitesse et 1 composante de pression). Dans l'équa-

tion (4.2), le modèle \mathbf{m} représente l'ensemble des propriétés physiques ou paramètres du milieu (vecteur de taille N_p). Dans les milieux élastiques isotropes, ces propriétés se ramènent à 3 paramètres : la vitesse des ondes P, la vitesse des ondes S et la densité. On définit alors la fonction coût comme la norme L_2 du vecteur résidus :

$$\mathbf{C}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\dagger \Delta \mathbf{d}, \quad (4.3)$$

où \dagger désigne l'opérateur adjoint (transposé conjugué). Outre la norme L_2 utilisée classiquement pour le calcul des résidus, on peut mentionner la norme logarithmique (Shin & Min, 2006; Shin *et al.*, 2007) qui permet une séparation naturelle de l'amplitude et de la phase (Bednar *et al.*, 2007; Pyun *et al.*, 2007) et la norme L_1 qui se révèle plus performante pour l'inversion élastique de données marines multi-composantes où la vitesse des ondes S peut avoir une contribution mineure dans les données (Brossier *et al.*, 2010). Dans ce travail, nous avons considéré uniquement la norme L_2 .

4.2.2 Linéarisation du problème inverse

Un développement de Taylor au second ordre au voisinage du modèle \mathbf{m}_0 de l'équation (4.3) donne :

$$C(\mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}) = C(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial C(\mathbf{m}_0)}{\partial m_j} \Delta m_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\partial^2 C(\mathbf{m}_0)}{\partial m_j \partial m_k} \Delta m_j \Delta m_k + \mathcal{O}(\mathbf{m}^3). \quad (4.4)$$

La dérivée par rapport au paramètre m_l aboutit à l'expression suivante :

$$\frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_l} = \frac{\partial C(\mathbf{m}_0)}{\partial m_l} + \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial^2 C(\mathbf{m}_0)}{\partial m_j \partial m_l} \Delta m_j. \quad (4.5)$$

Le minimum de la fonction coût au voisinage de \mathbf{m}_0 est atteint lorsque sa première dérivée s'annule. Dans ce cas, le terme de perturbation est donné par l'expression que nous avons introduite en début de chapitre et qui fait intervenir le gradient et le Hessian de la fonction coût :

$$\Delta \mathbf{m} = - \left[\frac{\partial^2 C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}^{-1} \left[\frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}. \quad (4.6)$$

4.2.3 Équations normales

Le gradient s'obtient en dérivant la fonction coût par rapport au paramètre m_l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_l} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_d} \left[\frac{\partial d_{cal_i}}{\partial m_l} (d_{obs_i} - d_{cal_i})^* + (d_{obs_i} - d_{cal_i}) \frac{\partial d_{cal_i}^*}{\partial m_l} \right] \\ &= -\sum_{i=1}^{N_d} \Re \left[\left(\frac{\partial d_{cal_i}}{\partial m_l} \right)^* (d_{obs_i} - d_{cal_i}) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec \Re la partie réelle et $*$ l'opérateur conjugué. Sous forme matricielle, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\nabla C_{\mathbf{m}} = \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = -\Re \left[\left(\frac{\partial \mathbf{d}_{cal}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \right)^\dagger (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{cal}(\mathbf{m})) \right] = -\Re [\mathbf{J}^\dagger \Delta \mathbf{d}], \quad (4.8)$$

avec \mathbf{J} la matrice des dérivées de Fréchet ou encore la matrice de sensibilité.

Le Hessien est obtenu en dérivant le gradient :

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} = \Re [\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}] + \Re \left[\frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{m}^T} (\Delta \mathbf{d}^* \dots \Delta \mathbf{d}^*) \right]. \quad (4.9)$$

En injectant les expressions (4.8) et (4.9) dans l'équation (4.6) nous obtenons l'expression suivante du modèle de perturbation (pour $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$) :

$$\Delta \mathbf{m} = - \left\{ \Re \left[\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{m}^T} (\Delta \mathbf{d}^* \dots \Delta \mathbf{d}^*) \right] \right\}^{-1} \Re [\mathbf{J}^\dagger \Delta \mathbf{d}]. \quad (4.10)$$

4.2.4 Expression du gradient

Dans le domaine fréquentiel, le système élasto-dynamique, une fois discrétisé par une méthode numérique, peut s'écrire sous forme d'un système linéaire :

$$\mathcal{A} \mathbf{u} = \mathbf{s}, \quad (4.11)$$

où \mathcal{A} est appelée la matrice d'impédance. Les inconnues de ce système sont les composantes du vecteur \mathbf{x} et \mathbf{s} est le terme qui représente la source sismique. En dérivant

l'équation (4.11) par rapport à m_l nous obtenons :

$$\mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l} = - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m_l} \mathbf{u}. \quad (4.12)$$

Cette expression nous indique que le champ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}$ (relatif à la matrice des dérivées de Fréchet) est solution du système élasto-dynamique où le terme source est $-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m_l} \mathbf{u}$. En remplaçant l'expression du champ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m_l}$ issu de l'équation (4.12) dans l'équation (4.8), nous obtenons pour le paramètre m_l :

$$\nabla C_{m_l} = \Re \left[\mathbf{u}^T \left[\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m_l} \right]^T \mathcal{A}^{-1T} (\mathcal{P} \Delta \mathbf{d})^* \right], \quad (4.13)$$

où \mathcal{P} est un opérateur qui projette le vecteur des résidus vers l'espace du problème direct (correspondance entre les positions des récepteurs et l'espace discrétisé du problème direct). Par ailleurs, comme cela se comprend via l'expression :

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}^{-1} \mathbf{s}, \quad (4.14)$$

les colonnes j de la matrice \mathcal{A}^{-1} contiennent les fonctions de Green associées aux sources localisées aux points j . Et de plus, en utilisant la réciprocité spatiale des fonctions de Green qui s'exprime par :

$$\mathcal{A}^{-1T} = \mathcal{A}^{-1}, \quad (4.15)$$

nous pouvons réécrire l'équation (4.13) comme suit :

$$\nabla C_{m_l} = \Re \left[\mathbf{u}^T \left[\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m_l} \right]^T \mathbf{r}^* \right]. \quad (4.16)$$

Cette équation montre que le gradient associé au paramètre m_l résulte du produit entre le champ direct \mathbf{u} et le champ $\mathbf{r}^* = \mathcal{A}^{-1} (\mathcal{P} \Delta \mathbf{d})^*$ qui est le champ engendré par l'émission des résidus depuis les positions des récepteurs. L'opérateur conjugué implique un retournement dans le domaine temporel, on parle de champ rétro-propagé. Le produit dans le domaine fréquentiel correspond à une corrélation (notée \star) des deux champs en domaine temporel en vertu de la relation :

$$\mathbf{u}(t) \star \mathbf{r}(t) \Leftrightarrow \mathbf{u}(\omega) \mathbf{r}(\omega)^*. \quad (4.17)$$

Le troisième terme qui intervient dans le produit de l'équation (4.16) est la dérivée de la matrice d'impédance \mathcal{A} par rapport au paramètre m_l . Ce terme est appelé le diagramme de rayonnement du paramètre m_l et sera décrit en détail au chapitre 4.3.2. Le gradient complet s'obtient en évaluant l'équation (4.16) pour l'ensemble des paramètres du milieu.

4.3 Construction des gradients

4.3.1 Calcul des champs monochromatiques

4.3.1.1 Approche par solveur direct

Le système élasto-dynamique (1.9) s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{v} &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_{\theta}(\mathcal{A}_{\theta}\sigma) \\ -i\omega \sigma &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_{\theta}(\mathcal{B}_{\theta}\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

où les matrices \mathcal{A}_{θ} et \mathcal{B}_{θ} ont été définies dans l'expression (1.10). La discrétisation du système (4.18) par une méthode numérique conduit à un système implicite qu'il semble à priori intéressant de résoudre puisque l'inversion des formes d'onde en domaine fréquentiel requiert l'obtention des champs d'onde direct et rétro-propagé dans ce même domaine comme l'indique l'équation (4.16). Dans cette optique, il est possible de construire la matrice d'impédance relative à la discrétisation du système élasto-dynamique en fréquence et de faire une factorisation LU de cette matrice. Cette décomposition peut être réalisée par un solveur direct tel MUMPS (Amestoy *et al.*, 2006). Pour l'inversion des formes d'onde, l'intérêt du solveur direct² réside dans son efficacité en ce qui concerne la résolution par source. En effet, une seule factorisation LU est nécessaire par fréquence et la résolution du système s'effectue pour chaque terme source selon un procédé de substitution peu coûteux numériquement. L'approche par solveur direct est donc avantageuse lorsqu'un nombre important de sources doit être considéré.

Nous abordons dans la suite, la résolution par un solveur direct du système élasto-dynamique en domaine fréquentiel discrétisé avec la méthode GD avec approximation P_0

²On peut aussi mentionner que des solveurs itératifs performants ont été développés pour l'équation d'onde acoustique (Erlangga, 2005; Riyanti *et al.*, 2006; Plessix, 2007) mais l'extension au cas élastique reste à être explorée.

ou méthode des volumes finis (voir chapitre 1.3.2.4).

Formulation volumes finis en fréquence

De la formulation temporelle GD (équation (2.8)), découle la formulation fréquentielle suivante :

$$\begin{aligned}
 -i\omega\rho_i(\mathcal{I}_3 \otimes \mathcal{K}_i)\vec{v}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{M}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta})\vec{\sigma}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{\sigma}_i + (\mathcal{P}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{\sigma}_k \right] \\
 -i\omega(\Lambda_i \otimes \mathcal{K}_i)\vec{\sigma}_i &= - \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} (\mathcal{N}_\theta \otimes \mathcal{E}_{i\theta})\vec{v}_i \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} \left[(\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{F}_{ik})\vec{v}_i + (\mathcal{Q}_{ik} \otimes \mathcal{G}_{ik})\vec{v}_k \right], \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

avec ω la fréquence angulaire. Les champs \vec{v}_i et $\vec{\sigma}_i$ sont des termes complexes. Pour la méthode des volume finis, les matrices \mathcal{K} , \mathcal{E} , \mathcal{F} et \mathcal{G} sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_i &= V_i \\
 \mathcal{E}_{i\theta} &= 0 \\
 \mathcal{F}_{ik} &= \mathcal{G}_{ik} = S_{ik}, \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

et le système (4.19) devient :

$$\begin{aligned}
 -i\omega\rho_i\vec{v}_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} S_{ik} \left[\mathcal{P}_{ik}(\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_k) \right] \\
 -i\omega\Lambda_i\vec{\sigma}_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} S_{ik} \left[\mathcal{Q}_{ik}(\vec{v}_i + \vec{v}_k) \right]. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

De plus, pour les tétraèdres, nous avons la propriété suivante :

$$\sum_{k \in N_i} S_{ik} \vec{n}_{ik} = \vec{0}, \tag{4.22}$$

et donc les contributions des composantes de vitesse et de contrainte de l'élément i s'annulent dans l'expression des flux de l'équation (4.21). Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 -i\omega\rho_i\vec{v}_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} S_{ik} \mathcal{P}_{ik} \vec{\sigma}_k \\
 -i\omega\Lambda_i\vec{\sigma}_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} S_{ik} \mathcal{Q}_{ik} \vec{v}_k. \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Approche dite 'parsimonieuse'

Le système (4.23) fait apparaître l'ensemble des composantes de vitesse et de contrainte, soit 9 composantes par élément. Un moyen de réduire le nombre d'inconnues est d'adopter l'approche dite 'parsimonieuse' introduite dans le cadre des différences finies par Luo & Schuster (1990). L'idée est de substituer les contraintes dans le système (4.23) afin de garder uniquement les 3 composantes de vitesse (la substitution est effectuée après la discrétisation du système). En effectuant cette substitution, nous obtenons :

$$-i\omega\rho_i\vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in N_i} S_{ik} \mathcal{P}_{ik} \left[-\frac{1}{i\omega} \Lambda_k^{-1} \frac{1}{2} \sum_{j \in N_k} S_{kj} \mathcal{Q}_{kj} \vec{v}_j \right], \quad (4.24)$$

où l'indice k représente les éléments voisins de l'élément i et j représente les voisins de k . Avec des tétraèdres, il y a 12 éléments j au maximum.

Écriture sous forme d'un système linéaire

Une fois discrétisée, l'équation (4.24) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire (4.11) où les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{s} sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(v_{x_1} \quad v_{y_1} \quad v_{z_1} \quad \cdots \quad v_{x_N} \quad v_{y_N} \quad v_{z_N} \right)^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{s} &= \left(s_{x_1} \quad s_{y_1} \quad s_{z_1} \quad \cdots \quad s_{x_N} \quad s_{y_N} \quad s_{z_N} \right)^{\mathbf{T}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec N le nombre d'éléments du maillage. Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un maillage régulier construit par division de cubes en 5 tétraèdres (figure 2.2). Avec ce maillage, la matrice \mathcal{A} présente 3 bandes diagonales (figure 4.8) avec 39 coefficients non nuls par rangée. De plus, si ce maillage contient n cubes dans les 3 directions, alors le nombre d'éléments est $5n^3$, le rang de la matrice est $15n^3$ et la largeur de bande est $30n^2$.

Coût numérique de la factorisation LU

La largeur de la bande de la matrice d'impédance conditionne fortement le coût numérique de la factorisation LU. En effet, le nombre de termes à stocker correspond globalement au remplissage des bandes diagonales de la matrice. Le nombre de facteurs LU est donc de l'ordre de $\mathcal{O}(n^5)$. Cependant, grâce à un réordonnement des coefficients de la matrice \mathcal{A} , la quantité de termes à stocker est généralement réduite à $\mathcal{O}(n^4)$ (Ashcraft & Liu, 1998). Le tableau 4.1, adapté de Nihei & Li (2007), résume les caractéristiques de l'approche par solveur direct en terme de consommation mémoire et du

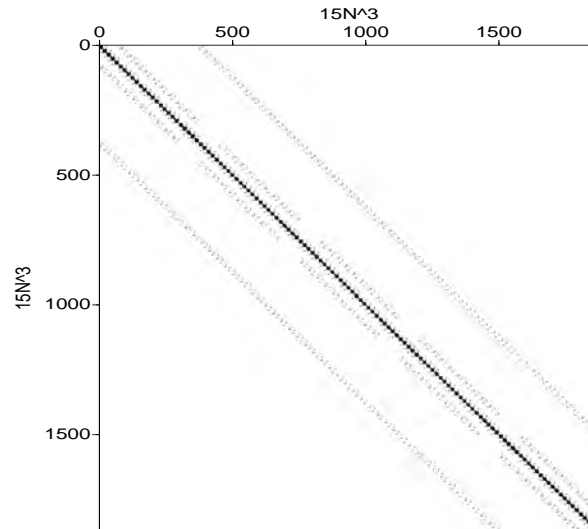


FIG. 4.8 – Matrice d’impédance relative au maillage de la figure 2.2. Les valeurs non nulles sont représentées par un point. Le rang de la matrice est 1875 et la largeur de la bande est 750.

TAB. 4.1 – Besoin en mémoire vive et nombre d’opérations requis pour l’approche par solveur direct et l’approche par schéma explicite en temps. La discrétisation repose sur un schéma en différences finies avec des grilles de taille $n \times n$ en 2D et $n \times n \times n$ en 3D. N_s est le nombre de sources et N_t est le nombre en pas de temps. Comme montré par Nihei & Li (2007), on peut approximer N_t par n afin d’avoir des lois homogènes entre les deux méthodes.

Dimension	Coût évalué	Solveur direct	Schéma explicite
2D	Mémoire vive	$\mathcal{O}(n^2 \log_2 n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
	Nb opérations	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n^2 N_t N_s) \sim \mathcal{O}(n^3 N_s)$
3D	Mémoire vive	$\mathcal{O}(n^4)$	$\mathcal{O}(n^3)$
	Nb opérations	$\mathcal{O}(n^6)$	$\mathcal{O}(n^3 N_t N_s) \sim \mathcal{O}(n^4 N_s)$

nombre d’opérations. Dans le cas 3D, le nombre d’opérations nécessaires pour la factorisation LU, c’est à dire le temps de calcul, est proportionnel à $\mathcal{O}(n^6)$. La figure 4.9 montre le rapport entre le nombre de facteurs LU qui ont été effectivement alloués par MUMPS et N^4 pour des maillages de différentes tailles. Ce rapport fluctue entre 1000 et 1700. Il est intéressant de constater que ce même rapport vaut 35 pour l’équation acoustique discrétisée par différences finies (Operto *et al.*, 2007). Par conséquent, pour des modèles numériques de tailles similaires, la factorisation LU dans le cas élastique

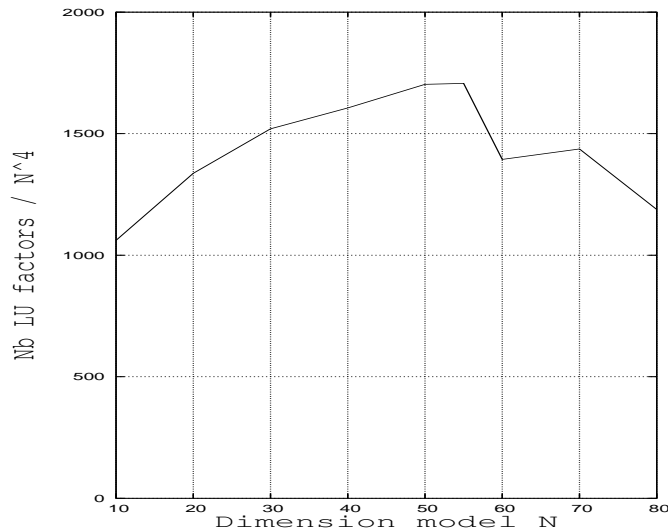


FIG. 4.9 – Rapport entre le nombre de facteurs LU qui ont été effectivement alloués par MUMPS et N^4 pour des maillages de différentes tailles.

est environ 50 fois plus onéreuse en terme de mémoire que dans le cas acoustique. Mais comme le cas élastique nécessite une discrétisation plus fine basée sur λ_S , le rapport de force entre l'élastique et l'acoustique est en fait de plusieurs ordres de grandeur. De ce fait, même pour des modèles élastiques de petites dimensions de l'ordre de quelques longueurs d'onde, les besoins en mémoire vive de la factorisation LU deviennent rapidement prohibitifs. A titre d'exemple, pour un modèle cubique avec un côté égal à 2 fois λ_P , la factorisation LU du système élasto-dynamique en GD P_0 requiert 352 Go et environ 2 heures avec 192 processeurs.

4.3.1.2 Approche par schéma explicite en temps

Comme indiqué dans le tableau comparatif 4.1, la résolution de l'équation d'onde à 3 dimensions par une méthode reposant sur un schéma explicite, engendre $\mathcal{O}(n^4 N_s)$ opérations alors qu'une résolution par le biais d'un solveur direct en requiert $\mathcal{O}(n^6)$. Par conséquent, pour un petit nombre de sources N_s (inférieur à n^2), l'approche par schéma explicite est donc la plus efficace. En terme de consommation mémoire, cette approche est également plus économe. De plus, cette dernière permet une utilisation efficace des plateformes de calculs parallèles, soit en traitant plusieurs sources à la fois, soit en partitionnant les modèles en plusieurs sous-domaines. Il est à noter que, dans le cas 2D, les conclusions sont opposées et le solveur direct est la méthode la plus adéquate (tableau

4.1). Fort de ce constat, nous avons fait le choix d'utiliser des schémas explicites en temps pour le problème direct dans notre processus d'inversion 3D qui reste en fréquence.

Transformée de Fourier discrète

Nous nous intéressons à l'extraction d'une solution fréquentielle à partir d'une solution temporelle par l'utilisation d'une transformée de Fourier discrète (TFD). Cette approche temps/fréquence a été initiée par Sirgue *et al.* (2008) dans le contexte d'inversion des formes d'ondes pour les milieux 3D acoustiques. La TFD d'un signal discret x_n s'exprime comme suit :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} \quad \forall k = 0, \dots, N-1, \quad (4.26)$$

où les indices n et k indiquent les numéros des échantillons dans les séries temporelle et fréquentielle respectivement et N correspond au nombre d'échantillons dans ces séries. La TFD inverse s'écrit alors :

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \quad \forall n = 0, \dots, N-1. \quad (4.27)$$

Dans la littérature, on trouve des expressions où la normalisation par $\frac{1}{N}$ s'applique sur la TFD inverse ou bien une normalisation par $\frac{1}{\sqrt{N}}$ à la fois sur la TFD et son inverse. Peu importe la définition choisie, car la propriété essentielle est la restitution du signal original par transformations successives de la TFD et de son inverse. En vertu du théorème de Shannon, un nombre minimum de 2 points par longueur d'onde est requis pour représenter fidèlement un signal. De ce fait, la fréquence seuil ou fréquence de Nyquist qu'il est possible d'extraire par TFD est donnée par :

$$f_{Nyquist} = \frac{1}{2\Delta t}, \quad (4.28)$$

où Δt est le pas d'échantillonnage du signal temporel. L'échantillonnage des fréquences est donné par :

$$\Delta f = \frac{1}{(N-1)\Delta t}. \quad (4.29)$$

Nous illustrons la TFD dans l'exemple qui suit. On considère le signal construit par la

somme de 3 sinusoides selon l'expression :

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 \sin(2\pi f_i + \phi_i) \quad (4.30)$$

avec $f_1 = 3$ Hz, $f_2 = 5$ Hz, $f_3 = 7$ Hz
 et $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$ rad, $\phi_2 = 0$ rad, $\phi_3 = +\frac{\pi}{4}$ rad.

La figure 4.10.a montre le signal $u(t)$ sur l'intervalle de 0 à 5 secondes discrétisé avec un pas de 10 ms. Le spectre en amplitude relatif à ce signal évalué par TFD est représenté sur la figure 4.10.b. Dans ce spectre, on retrouve bien 3 pics centrés sur 3, 5 et 7 Hz avec une amplitude de 1, conformément au contenu du signal analysé. La largeur des pics correspond au pas d'échantillonnage fréquentiel de 0.2 Hz. Comme nous l'avons mentionné, une TFD inverse permet de reconstruire parfaitement le signal initial.

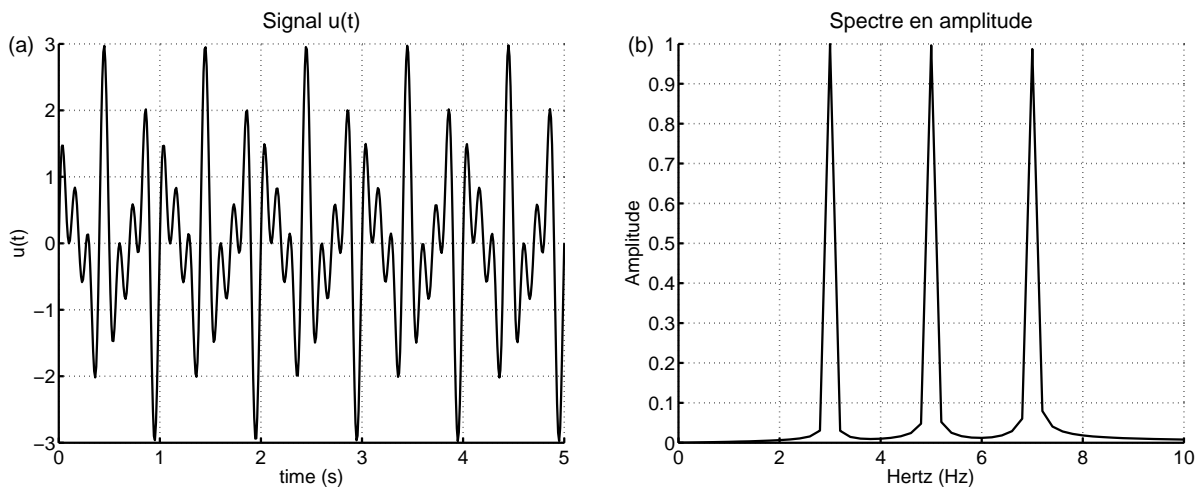


FIG. 4.10 – (a) Signal obtenu par la somme de 3 sinusoides. (b) Transformée de Fourier discrète du signal.

Extraction multi-fréquences

Un avantage majeure de la TFD est qu'elle s'intègre aisément dans un schéma explicite car elle s'effectue lors de la modélisation du champ d'onde au cours des itérations sur les pas en temps. Il n'est donc pas nécessaire de stocker la série temporelle contrairement à d'autres algorithmes comme la transformée de Fourier rapide (FFT : *fast Fourier transform*) (Press *et al.*, 2007). D'autre part, le calcul de la TFD étant peu coûteux,

l'extraction de plusieurs fréquences simultanément est une opération qui ne représente quasiment aucun coût de calcul supplémentaire. Par conséquent, cette approche est particulièrement intéressante lorsqu'un nombre important de fréquences N_f doit être considéré dans l'inversion au sein d'une même itération. Dans ce cas, le nombre d'opérations pour la méthode explicite reste inchangé et vaut $\mathcal{O}(n^4 N_s)$ mais par contre il requiert N_f factorisations LU pour le solveur direct soit un nombre d'opérations de l'ordre $\mathcal{O}(n^6 N_f)$. Cela conforte l'option du schéma explicite par rapport au solveur direct. La figure 4.11 montre un exemple de cartes en fréquence extraites à partir d'une même modélisation en temps.

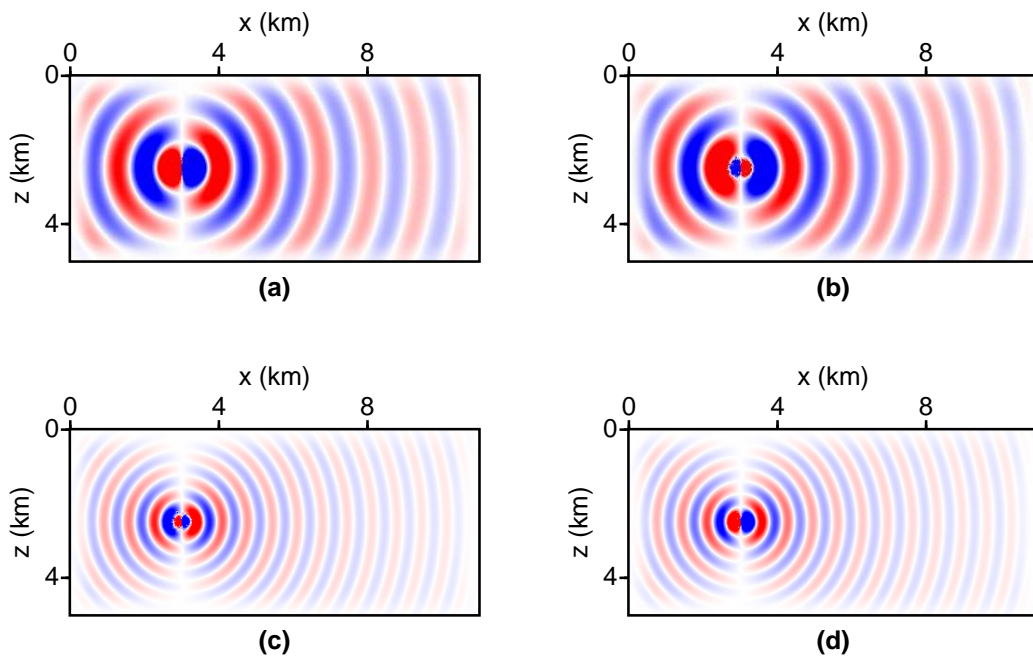


FIG. 4.11 – (a) & (b) Partie réelle et partie imaginaire, respectivement, du champ d'onde monochromatique à 3 Hz (composante v_x) généré par une source explosive dans un milieu homogène élastique. Ce champ a été obtenu au terme d'une modélisation de 2 s. La fonction source est un Ricker avec une fréquence centrale de 3 Hz. Le plan de visualisation est le plan xz . (c) & (d) Idem (a) & (b) pour le champ d'onde monochromatique à 6 Hz.

Un autre point en faveur du schéma explicite provient du fait que les acquisitions sismiques s'effectuent dans un laps de temps déterminé et donc l'extraction des fréquences par TFD est fidèle au contenu des signaux. On peut par ailleurs envisager de faire des fenêtrages dans les données à des fins de préconditionnement comme nous l'avons évoqué

en début de chapitre. Il n'en va pas de même pour la résolution du système élasto-dynamique par un solveur direct dans le domaine fréquentiel qui fournit la solution en régime stationnaire, équivalent à un temps infini. Par conséquent, certains phénomènes peuvent se retrouver dans la solution du solveur direct alors même qu'ils n'ont pas été enregistrés par le dispositif d'acquisition. On note toutefois, qu'il est possible d'introduire une fonction d'amortissement dans le système fréquentiel, équivalente à une décroissance exponentielle avec le temps (Shin *et al.*, 2002), mais le fenêtrage temporel est plus délicat à réaliser par rapport à une approche basée sur un schéma explicite en temps.

4.3.2 Bénéfice de la formulation pseudo-conservative

Le système élasto-dynamique sous sa forme pseudo-conservative (1.16), s'écrit dans le domaine fréquentiel de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 -i\omega \rho \mathbf{v}(\omega) &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_{\theta}(\mathcal{M}_{\theta} \sigma(\omega)) \\
 -i\omega \Lambda \sigma(\omega) &= \sum_{\theta \in \{x,y,z\}} \partial_{\theta}(\mathcal{N}_{\theta} \mathbf{v}(\omega)),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

où les matrices \mathcal{M}_{θ} , \mathcal{N}_{θ} et Λ ont été définies dans les expressions (1.17) et (1.18). Rappelons que ce système est obtenu à partir du changement de variable défini dans l'éq. (1.15). La particularité du système (4.31) provient du fait que les propriétés physiques (la densité et les paramètres de Lamé) sont localisées du côté des dérivées temporelles (partie gauche du système) et non du côté des dérivées spatiales. Cette caractéristique a une importante conséquence sur la matrice d'impédance. En effet, les paramètres du milieu interviennent uniquement dans les termes diagonaux de la matrice. De ce fait, le diagramme de rayonnement introduit dans l'équation du gradient (4.16) est purement diagonal, ce qui rend le calcul du gradient relativement aisé à implémenter. Par conséquent, la différenciation de la matrice \mathcal{A} par rapport à un paramètre situé au point l engendre une matrice dont seuls les coefficients non nuls sont situés sur la diagonale, à l'intersection des lignes et des colonnes associées aux composantes de vitesse et de

contrainte du point l :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m_l} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial m_l} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Nous pouvons donc substituer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{r} (de taille $9N_p$) impliqués dans l'expression (4.16) par les vecteurs \mathbf{u}_l et \mathbf{r}_l qui contiennent seulement les 9 composantes associées au point l et obtenir l'expression du gradient :

$$\nabla C_{m_l} = \Re \left[\mathbf{u}_l^T \left[\frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial m_l} \right]^T \mathbf{r}_l^* \right]. \quad (4.33)$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial m_l} = \text{diag}(a_l, b_l, c_l, d_l, e_l, f_l, g_l, h_l, i_l). \quad (4.34)$$

Si l'on utilise la définition du vecteur (1.6) pour l'ordonnancement des composantes des vecteurs \mathbf{u}_l et \mathbf{r}_l , alors les 9 termes non nuls de la matrice (4.34) sont donnés par les dérivées de ρ et des termes de Λ comme suit :

$$\begin{aligned} a_l &= b_l = c_l = -i\omega \frac{\partial \rho_l}{\partial m_l} \\ d_l &= -i\omega \frac{\partial(3/(3\lambda_l + 2\mu_l))}{\partial m_l} \\ e_l &= f_l = -i\omega \frac{\partial(3/(2\mu_l))}{\partial m_l} \\ g_l &= h_l = i_l = -i\omega \frac{\partial(1/\mu_l)}{\partial m_l}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

L'expression (4.33) indique que le calcul du gradient au point l (quelque soit le paramètre considéré) fait intervenir uniquement les composantes de vitesse et de contrainte en ce point. Dans les prochains chapitres, nous illustrons cette intéressante propriété fournie par la formulation pseudo-conservative en ce qui concerne la construction des gradients relatifs aux 3 paramètres que nous avons considérés dans l'inversion : les vitesses des ondes P et S ainsi que la densité.

4.3.3 Gradient de V_P

La différenciation de la matrice d'impédance par rapport au paramètre V_P et au point l , a pour expression, en supposant les autres paramètres constants (V_S, ρ) :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1(\omega)}{\partial V_{Pl}} = \text{diag}\left(0, 0, 0, d_l, 0, 0, 0, 0, 0\right) \quad (4.36)$$

avec

$$d_l = \frac{18 i\omega V_{Pl}}{\rho_l(3V_{Pl}^2 - 4V_{Sl}^2)^2}.$$

Nous constatons d'après l'expression (4.36) que le calcul du gradient ne fait intervenir que la composante de pression des champs incidents et rétro-propagés. Afin d'illustrer la construction des gradients dans le domaine fréquentiel, nous présentons une série de résultats obtenus dans le milieu acoustique considéré précédemment (figure 4.1). Nous utilisons la même source sismique et un ensemble de 26 896 récepteurs répartis tous les 200 m de manière uniforme dans le volume du modèle. Les récepteurs sont des capteurs de pression. La figure 4.12 présente des coupes du gradient obtenu par combinaison des champs de pression et du diagramme de rayonnement défini en (4.36). Nous observons une amplitude négative significative dans la région de l'hétérogénéité qui correspond bien à une anomalie positive de la vitesse V_P dans le vrai modèle. D'autres perturbations sont également présentes aux alentours de l'hétérogénéité. Nous pouvons accroître la résolution du gradient en sommant les contributions de N_f fréquences :

$$\nabla C_{m_l} = \sum_{f=1}^{N_f} \nabla C_{m_l}(\omega_f). \quad (4.37)$$

où ω_f désigne la fréquence d'indice f . La figure 4.13 montre le gradient obtenu avec 5 fréquences. On note une résolution accrue par rapport au gradient mono-fréquentiel ; l'hétérogénéité est mieux résolue et les effets dûs à la bande passante limitée ont fortement été réduits aux alentours. L'amélioration du gradient se poursuit lorsque l'on considère 10 fréquences (figure 4.14) mais en revanche, le gradient n'évolue quasiment plus si l'on ajoute des fréquences supplémentaires. On constate dans cet exemple, que 10 fréquences suffisent pour une reconstruction optimale du gradient. Les figures 4.12, 4.13 et 4.14 ont présenté le gradient pondéré par une approximation de Hessien. Nous avons utilisé l'approximation proposée par Shin *et al.* (2001a) et dont les termes diagonaux s'expriment

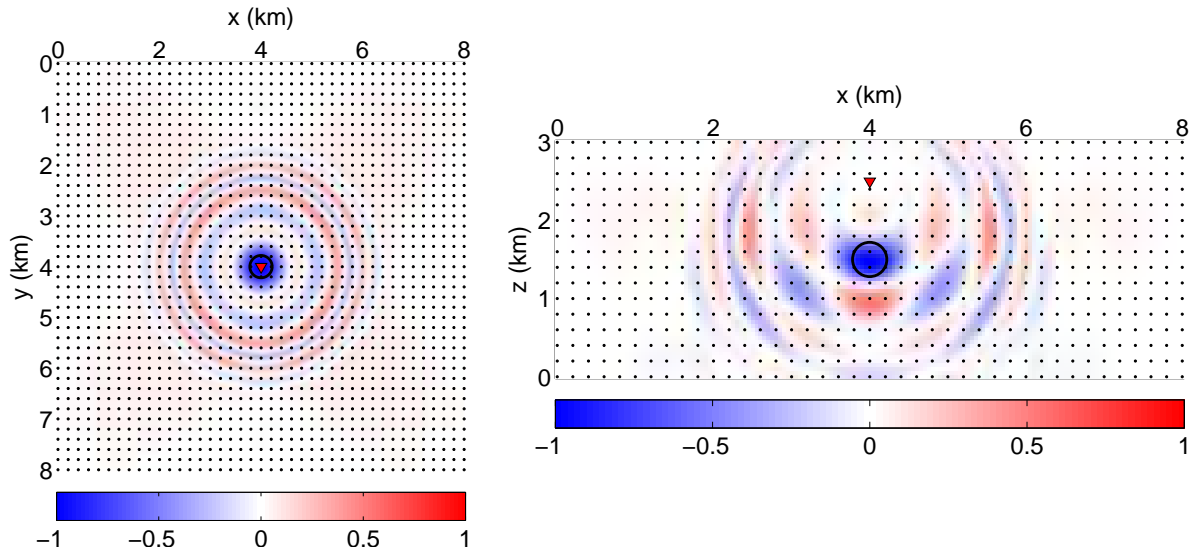


FIG. 4.12 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_P selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite) qui passent par le centre de l'hétérogénéité. **Une seule fréquence** a été utilisée (3 Hz). Les positions des récepteurs sont indiquées par des points noirs et la position de la source par le triangle rouge.

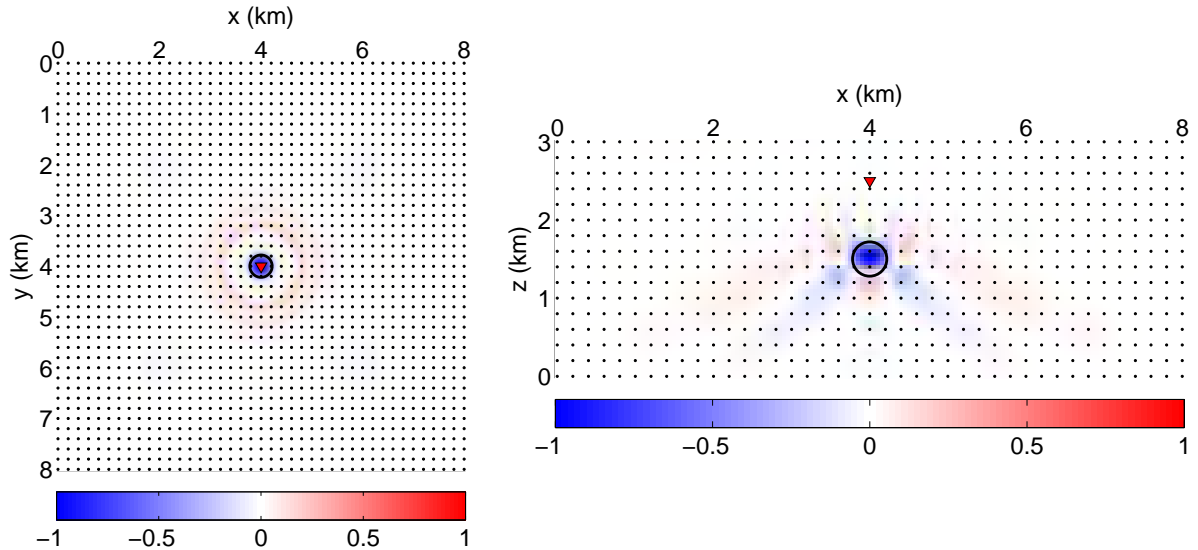


FIG. 4.13 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_P selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite) lorsque **5 fréquences** sont utilisées (également réparties entre 3 et 6.5 Hz).

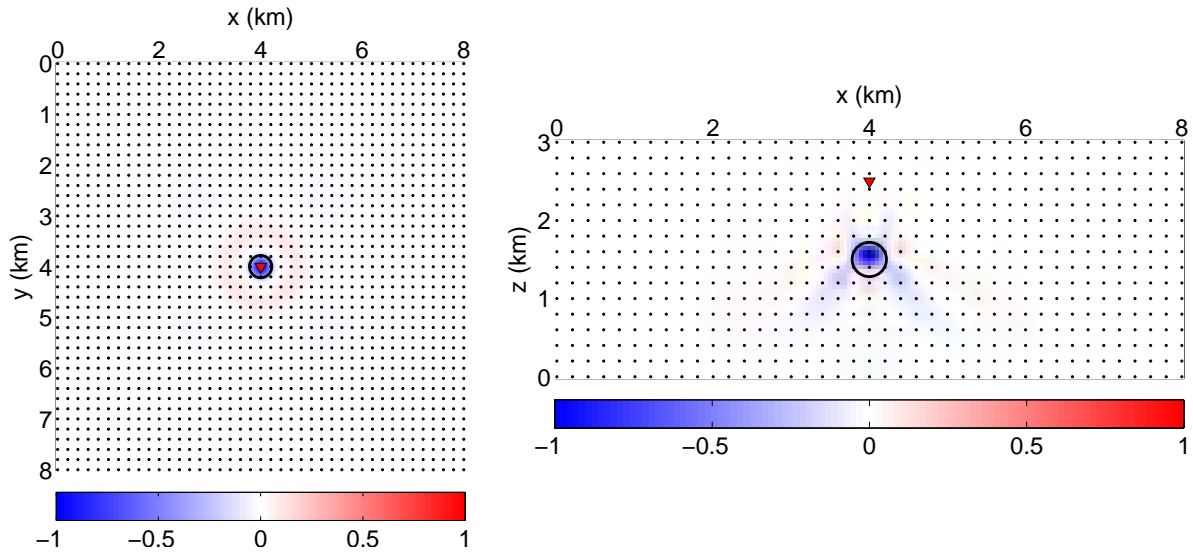


FIG. 4.14 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_P selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite) lorsque **10 fréquences** sont utilisées (également réparties entre 3 et 13 Hz).

avec la formulation pseudo-conservative :

$$\mathcal{H}_l = \Re \left[\mathbf{u}_l^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial m_l} \right]^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial m_l} \right] \mathbf{u}_l \right]. \quad (4.38)$$

L'avantage de cette approximation du Hessien est qu'elle ne requiert aucun calcul de champ supplémentaire en plus de ceux impliqués dans le calcul du gradient (seul le champ incident est utilisé). La figure 4.15 représente des coupes du pseudo-Hessien. Il s'agit d'un champ dont l'amplitude décroît avec la distance par rapport à la source et qui a pour but de corriger l'atténuation géométrique des ondes. Sur la figure 4.16, on peut observer le gradient brut sans prise en compte du pseudo-Hessien. On remarque, comparativement à la figure 4.14, la présence d'artéfacts entre la source et l'hétérogénéité. Dans la suite des tests, sauf mention contraire, nous prendrons toujours en compte la pondération du gradient par le pseudo-Hessien. Enfin, pour compléter la construction du gradient, il est nécessaire de sommer la contribution de chaque source sismique :

$$\nabla C_{m_l} = \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{f=1}^{N_f} \nabla C_{m_l}(\omega_f, \mathbf{x}_s), \quad (4.39)$$

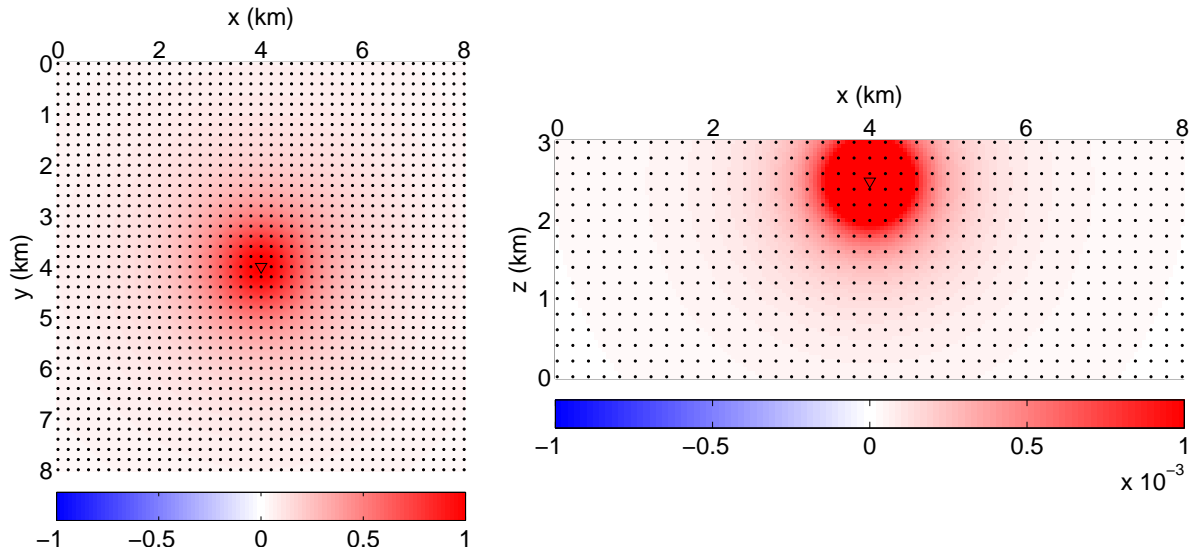


FIG. 4.15 – Coupes du pseudo-Hessien normalisé selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite).

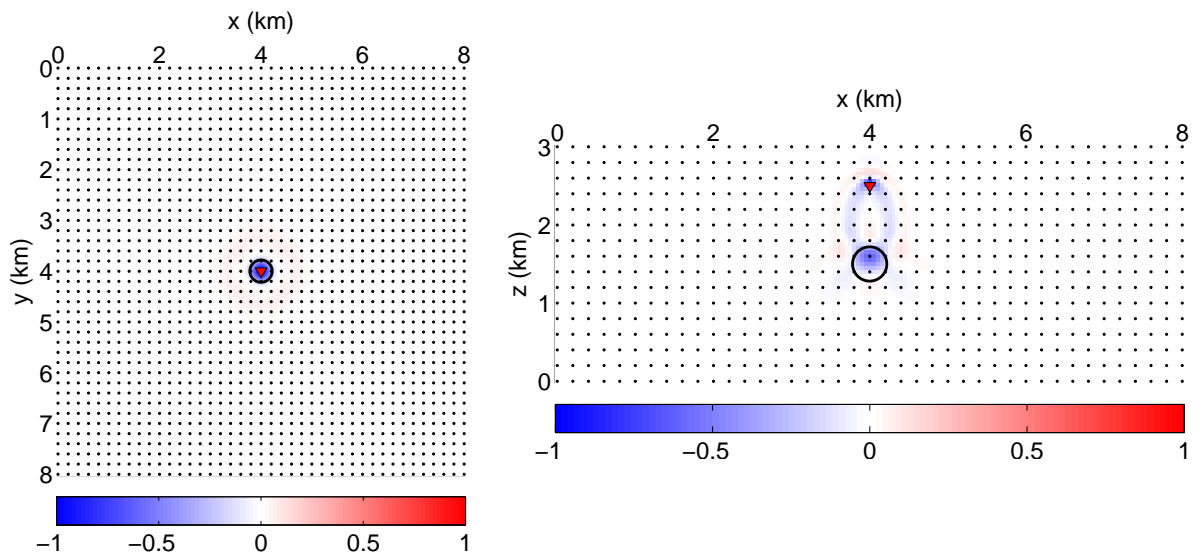


FIG. 4.16 – Idem figure 4.14 excepté que le Hessien n'a pas été pris en compte.

avec N_s le nombre de sources et \mathbf{x}_s la position de la source. Sur la figure 4.17, nous pouvons observer le gradient construit à l'aide de 8 sources sismiques qui permettent une relocalisation quasi-parfaite de l'hétérogénéité.

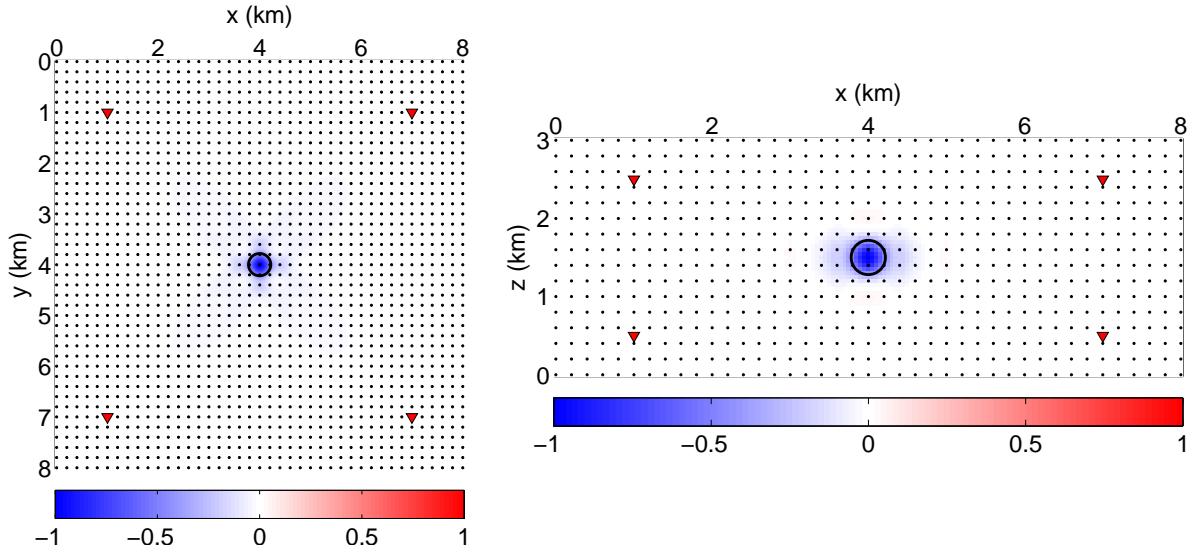


FIG. 4.17 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_P selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite) lorsque **8 sources** (localisées à proximité des 8 coins du modèle) et **10 fréquences** sont utilisées (également réparties entre 3 et 13 Hz).

4.3.4 Gradient de V_S

La différenciation de la matrice d'impédance par rapport au paramètre V_S et au point l , a pour expression, en supposant les autres paramètres constants (V_P, ρ) :

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\omega)}{\partial V_{Sl}} = \text{diag}\left(0, 0, 0, d_l, e_l, f_l, g_l, h_l, i_l\right) \quad (4.40)$$

avec

$$\begin{aligned} d_l &= \frac{-24 i \omega V_{Sl}}{\rho_l (3V_{Pl}^2 - 4V_{Sl}^2)^2} \\ e_l &= f_l = \frac{3i\omega}{\rho_l V_{Sl}^3} \\ g_l &= h_l = i_l = \frac{2i\omega}{\rho_l V_{Sl}^3} \end{aligned}$$

Nous constatons d'après l'expression (4.40) que le calcul du gradient du paramètre V_S fait intervenir la totalité des composantes de contrainte des champs incidents et rétro-propagés. Dans l'exemple qui suit, nous considérons un milieu élastique de dimensions similaires au cas précédent. Le milieu est constitué d'un encaissant homogène ($V_P =$

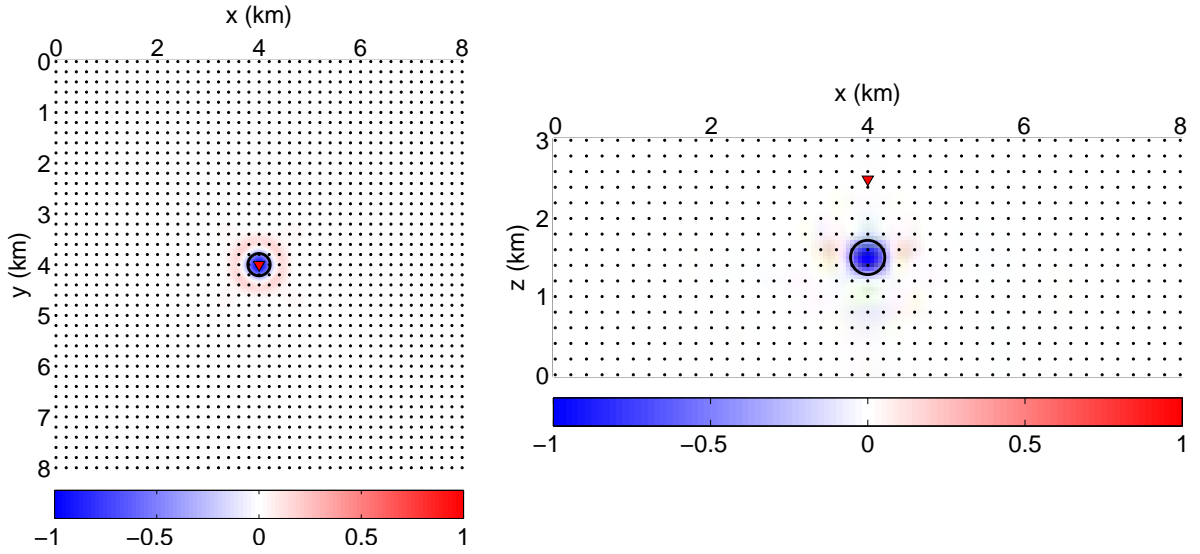


FIG. 4.18 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_S selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite). **10 fréquences** ont été utilisées (également réparties entre 3 et 13 Hz).

6000 m/s et $V_S = 3000$ m/s) et contient une hétérogénéité sphérique de diamètre 400 m avec $V_S = 3500$ m/s. Comme dans la cas précédent, la densité est constante ($\rho = 2000$ kg/m³). Nous utilisons la même source et les mêmes récepteurs qu'auparavant excepté que les récepteurs sont des capteurs de vitesse à 3 composantes. La figure 4.18 montre le gradient du paramètre V_S obtenu avec 10 fréquences. On observe une légère meilleure reconstruction de l'hétérogénéité par rapport au cas acoustique (en comparaison avec la figure 4.14) qui provient du fait que les longueurs d'onde des ondes S que l'on prend en compte dans cette inversion élastique, sont plus courtes que celle des ondes P et donc, procurent un pouvoir de résolution accru.

4.3.5 Gradient de ρ

La différenciation de la matrice d'impédance par rapport au paramètre ρ et au point l , a pour expression, en supposant les autres paramètres constants (V_P, V_S) :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_l(\omega)}{\partial \rho_l} = \text{diag} \left(a_l, b_l, c_l, d_l, e_l, f_l, g_l, h_l, i_l \right) \quad (4.41)$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_l &= b_l = c_l = -i\omega \\
 d_l &= \frac{3i\omega}{\rho_l^2(3V_{Pl}^2 - 4V_{Sl}^2)} \\
 e_l &= f_l = \frac{3i\omega}{2\rho_l^2V_{Sl}^2} \\
 g_l &= h_l = i_l = \frac{i\omega}{\rho_l^2V_{Sl}^2}
 \end{aligned}$$

Nous constatons d'après l'expression (4.41) que le calcul du gradient du paramètre ρ fait intervenir la totalité des composantes de vitesse et de contrainte des champs incidents et rétropropagés.

4.3.6 Recherche du pas de descente

Dans les tests précédents, nous avons simplement présenté les gradients calculés à la première itération de l'inversion. L'objectif de la FWI est de rechercher, à chaque itération, un nouveau modèle qui va minimiser la fonction coût. Ce nouveau modèle s'obtient en ajoutant au modèle précédent une perturbation (dans la direction opposée du gradient). Cependant, en vertu de l'approximation du Hessien que nous avons adoptée (équation 4.38), il est nécessaire de rechercher ce nouveau modèle via un pas de descente α :

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \alpha \Delta \mathbf{m}, \quad (4.42)$$

où k désigne l'indice de l'itération courante de la FWI. On peut employer différents algorithmes pour la recherche du pas de descente. Celui que nous avons choisi est un ajustement parabolique qui consiste à tester plusieurs valeurs du pas de descente de manière à obtenir les points permettant de définir une parabole et d'en trouver son minimum. Dans la figure 4.19, nous avons représenté la valeur de la fonction coût en fonction d'un pourcentage de la perturbation calculée par l'équation (4.6) à la première itération de la FWI. Nous pouvons observer la forme globalement parabolique de la fonction coût dont le minimum est atteint pour un pas de descente d'environ de 10 % (dans ce cas, le gradient fournit une surestimation du modèle de perturbation optimal).

La figure 4.20 montre des coupes du modèle \mathbf{m}_1 obtenu avec le pas de descente optimal. Afin d'évaluer la qualité de la reconstruction du modèle, nous présentons dans la

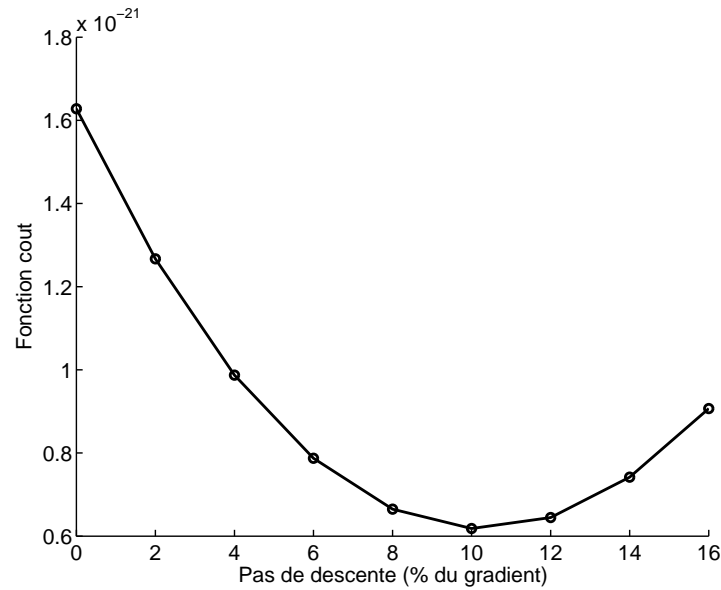


FIG. 4.19 – Valeur de la fonction coût en fonction du pas de descente pour la première itération FWI dans le modèle acoustique contenant une hétérogénéité. L'inversion a été effectuée avec 10 fréquences et le dispositif comprend une source et 26 896 récepteurs .

figure 4.21 des profils de ce modèle selon des directions verticale et horizontale. On peut tout d'abord constater un déficit d'amplitude en ce qui concerne la vitesse reconstruite au niveau de l'hétérogénéité. Ce déficit peut s'expliquer par le fait qu'il s'agit simplement de la première itération de la FWI et également par le fait que nous avons utilisé dans cette expérience une seule source sismique. En ce qui concerne la relocalisation de l'hétérogénéité, nous observons une meilleure résolution dans la direction horizontale que dans la direction verticale. Cela provient du dispositif d'acquisition qui fournit un meilleur éclairage de l'anomalie dans les directions horizontales. Nous notons aussi que dans la coupe verticale, la relocalisation spatiale de l'hétérogénéité est meilleure du côté de la source (localisée à $z = 2.5$ km) comparativement au côté opposé où nous constatons la présence d'artéfacts disséminés du bord inférieur de l'hétérogénéité jusqu'à la limite inférieure du modèle.

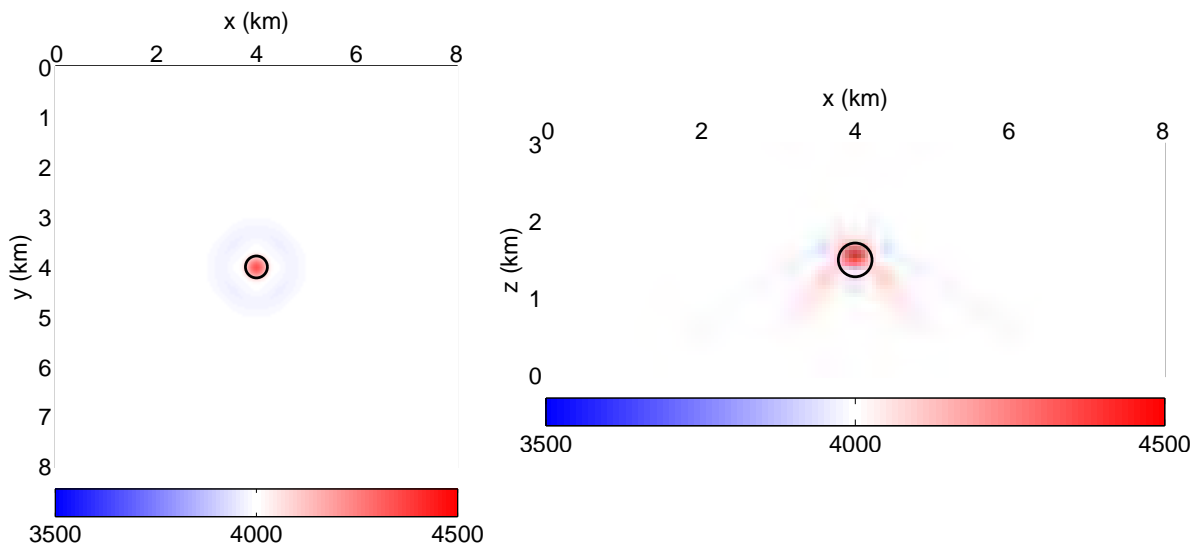


FIG. 4.20 – Coupes du modèle V_P reconstruit à la première itération de l'inversion (modèle \mathbf{m}_1) selon les plans xy (à gauche) et xz (à droite). **10 fréquences** ont été utilisées (également réparties entre 3 et 13 Hz).

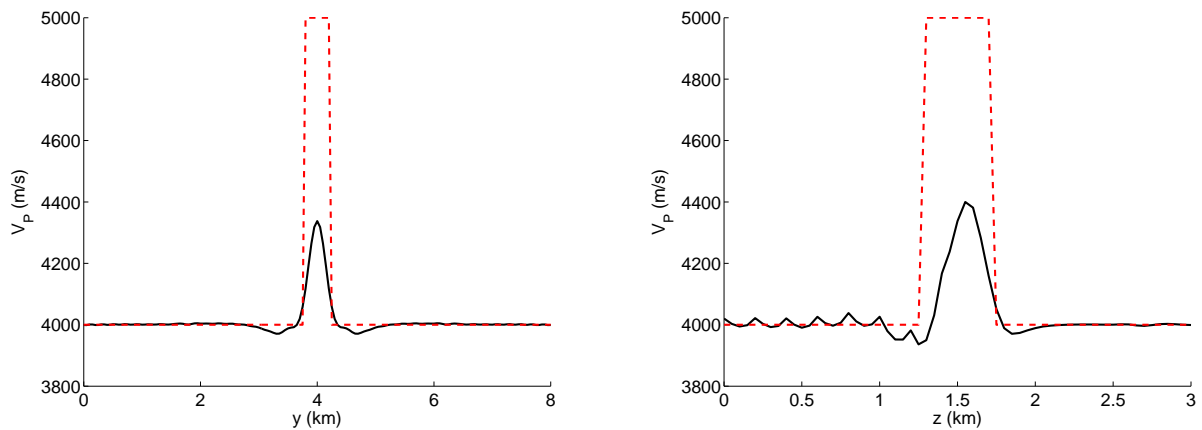


FIG. 4.21 – Profils du modèle V_P reconstruit à la première itération de l'inversion (modèle \mathbf{m}_1) selon les directions horizontale y (à gauche) et verticale z (à droite) qui passent par le centre de l'hétérogénéité. La courbe noire correspond au modèle reconstruit et la courbe rouge en pointillés à celle du vrai modèle.

Chapitre 5

Choix stratégiques, algorithmes et applications

Sommaire

5.1	Choix de la méthode numérique	203
5.2	Abstraction entre problème direct et problème inverse . . .	205
5.2.1	Découplage des paramétrisations	205
5.2.2	Discrétisation arbitraire de l'inversion	206
5.2.3	Du problème direct au problème inverse	208
5.2.4	Et <i>vice versa</i>	208
5.3	Algorithme général	209
5.4	Quelques applications dans des cas simples	212
5.4.1	Inversion avec les différences finies	212
5.4.2	Inversion avec les éléments finis discontinus	217

5.1 Choix de la méthode numérique

Nous avons présenté dans le premier chapitre de ce mémoire les principales méthodes numériques utilisées en modélisation sismique en insistant sur les avantages et les inconvénients de chaque méthode. Nous retiendrons que, selon les caractéristiques des milieux géologiques, comme la présence d'une topographie complexe ou un fort contraste dans les vitesses de propagation, certaines méthodes sont plus appropriées que d'autres. Par exemple, pour les milieux avec une topographie plane et avec un contraste relativement

faible des vitesses de propagation (comme c'est en général le cas des milieux rencontrés en prospection pétrolière), les méthodes DF sont particulièrement bien adaptées. En revanche, pour les milieux plus complexes (cas des milieux rencontrés dans les études géophysiques de la proche surface ou en sismologie globale), on préférera employer des méthodes EF, telle que l'approche GD qui a fait l'objet de la première partie de ce mémoire.

A titre d'illustration, le tableau 5.1 présente les statistiques concernant la modélisation du problème direct par les méthodes GD et DF pour le modèle acoustique introduit au chapitre précédent (figure 4.1). La méthode DF que nous avons considérée repose sur un schéma numérique du 2nd ordre en temps et du 4^{ème} ordre en espace (Levander, 1988). Pour les deux méthodes, nous avons adopté pour le parallélisme, un partitionnement par sous-domaines (avec des communications MPI) et pour les conditions absorbantes, une formulation de type CPML (Komatitsch & Martin, 2007). La grille cartésienne pour la méthode DF comporte 6 points / λ_{min} (avec $\lambda_{min} \simeq 300$ m) et nous avons choisi une discrétisation moyenne d'environ 3 éléments / λ_{min} pour la construction du maillage tétraédrique de l'approche GD. Dans cet exemple, nous constatons le gain sur le nombre d'inconnues et sur le nombre de pas en temps de l'approche DF par rapport à l'approche GD. En effet, ce milieu quasi-homogène et sans surface libre ne permet pas de tirer profit des spécificités de la méthode GD. Ceci se traduit par un gain conséquent sur le temps de calcul d'un facteur 45 en faveur de la méthode DF (en raisonnant sur un temps de calcul mono-processeur). On note que les temps de calcul par inconnue et par pas en temps sont à peu près du même ordre pour les deux approches (mais environ 5 fois supérieurs à la valeur observée avec le schéma numérique DF du 2nd ordre en temps et en espace que nous avons indiquée dans le tableau 3.3). Il faut souligner que les deux méthodes que nous avons employées dans cet exemple reposent sur la résolution du système élastodynamique (1.4) (en posant $\mu = 0$). Bien entendu, nous aurions obtenu une réduction efficace du nombre d'inconnues et du temps de calcul en résolvant le système acoustique (1.11) parfaitement approprié pour ce modèle acoustique.

L'exemple que nous venons de considérer est un cas extrêmement simple qui suggère qu'en fonction des caractéristiques des milieux, il paraît judicieux de pouvoir choisir la méthode numérique pour la modélisation des champs d'onde au sein du processus de la FWI. Pour faciliter l'implémentation de cette option d'un point de vue numérique, nous présentons au prochain chapitre, la stratégie que nous avons adoptée.

TAB. 5.1 – Statistiques concernant la modélisation du problème direct par les méthodes GD et DF pour le modèle acoustique introduit au chapitre précédent (figure 4.1). Les calculs ont été réalisés avec des processeurs octo-pro dual core Opteron 2,6 Ghz pour les deux approches.

	Approche GD	Approche DF
Temps de modélisation	1.8 s	1.8 s
Nb éléments ou points de grille	2.4 millions	4.1 millions
Ordre en espace	P_2	4 ^{ème} ordre
Ordre en temps	2 nd ordre	2 nd ordre
Nb inconnues	216 millions	37 millions
Min. / Moy. / Max. longueur élément ou pas de grille	63 / 128 / 254 m	50 m
Nb de pas en temps	2 251	450
Nb CPUs	32	16
Précision	Double	Double
Temps de calcul	1 h 20 m 36 s	3 m 36 s
Temps / inconnue / pas en temps	0.32 μ s	0.21 μ s

5.2 Abstraction entre problème direct et problème inverse

5.2.1 Découplage des paramétrisations

Le concept principal, sur lequel repose notre processus d'inversion, est une discrétisation du problème inverse découplée de celle du problème direct. Ce principe est illustré par la figure 5.1 qui montre dans la partie supérieure, une discrétisation du problème direct à l'aide d'un maillage triangulaire et, dans la partie inférieure, une discrétisation du problème inverse sous la forme d'une grille cartésienne. Ce principe (ou ce concept d'abstraction entre problème direct et problème inverse) possède plusieurs avantages. Tout d'abord, il permet de développer un processus d'inversion qui ne dépend pas de la méthode employée pour la modélisation des champs d'onde. De ce fait, l'inversion peut s'appuyer sur différentes méthodes numériques que l'on choisit en fonction des milieux que l'on souhaite imager. Nous reviendrons par la suite sur l'interfaçage des méthodes numériques de propagation des ondes dans la FWI. Un second bénéfice du principe d'abstraction est la possibilité de définir une zone du milieu que l'on souhaite imager (ou zone cible) au sein du modèle où sont modélisés les champs d'onde. D'un point de vue numé-

rique, cela permet de réduire la quantité d'information à manipuler lors de la construction des gradients et cela garantit une répartition optimale de la charge de calcul entre les processeurs (*load balancing*) dans le cadre d'un calcul parallèle. Dans la figure 5.1, nous avons défini une zone cible qui correspond au milieu initial sans les couches absorbantes. Il semble effectivement judicieux de ne pas considérer dans l'inversion les couches absorbantes qui sont des milieux artificiels introduits par pure nécessité numérique. Dans la partie haute de la figure 5.1, on peut se rendre compte que les sous-domaines aux bords du modèle du problème direct (comme la partition 1) sont à cheval entre les couches absorbantes et la zone cible. Par conséquent, si nous utilisons une même discrétisation et un même partitionnement pour l'inversion, ces sous-domaines auraient moins d'information à manipuler que les sous-domaines entièrement localisés dans la zone cible (comme la partition 3). Dans ce cas, on assisterait à un déséquilibre de la charge de calcul par processeurs. En revanche, grâce au découplage des discrétisations, on peut adapter la paramétrisation du problème inverse de manière conforme à la zone cible et redistribuer la charge équitablement entre les processeurs comme on peut le voir, dans la partie inférieure de la figure 5.1 (les partitions 1 et 3 du problème inverse comportent un nombre de points identiques). On peut noter la totale indépendance spatiale entre les sous-domaines du problème direct et ceux du problème inverse.

5.2.2 Discrétisation arbitraire de l'inversion

Nous avons abordé au chapitre 4.3.2, l'intérêt de la forme pseudo-conservative du système élasto-dynamique (1.16) en ce qui concerne la construction des gradients de la fonction coût. Nous rappelons que, par le biais de cette formulation, le calcul du gradient en un point de l'espace, quel que soit le paramètre considéré, fait intervenir uniquement les composantes de vitesse et de contrainte (des champs incidents et rétro-propagés) calculées en ce point. La discrétisation du problème inverse peut alors être réalisée via un ensemble de points que l'on peut répartir de manière arbitraire. Ces derniers peuvent être considérés comme des points de mesure indépendants les uns des autres. Par opposition, en adoptant le système élasto-dynamique sous sa forme standard (1.4), on aboutit à des expressions des gradients qui font intervenir des dérivées spatiales des champs d'onde. Pour calculer ces dérivées, on peut avoir recours à des schémas DF (qui présupposent que l'inversion est réalisée sur une grille cartésienne) ou bien substituer les dérivées spatiales des vitesses et des contraintes par une combinaison des composantes de contrainte et de vitesse respectivement (Mora, 1988; Guasch *et al.*, 2010). Dans ce

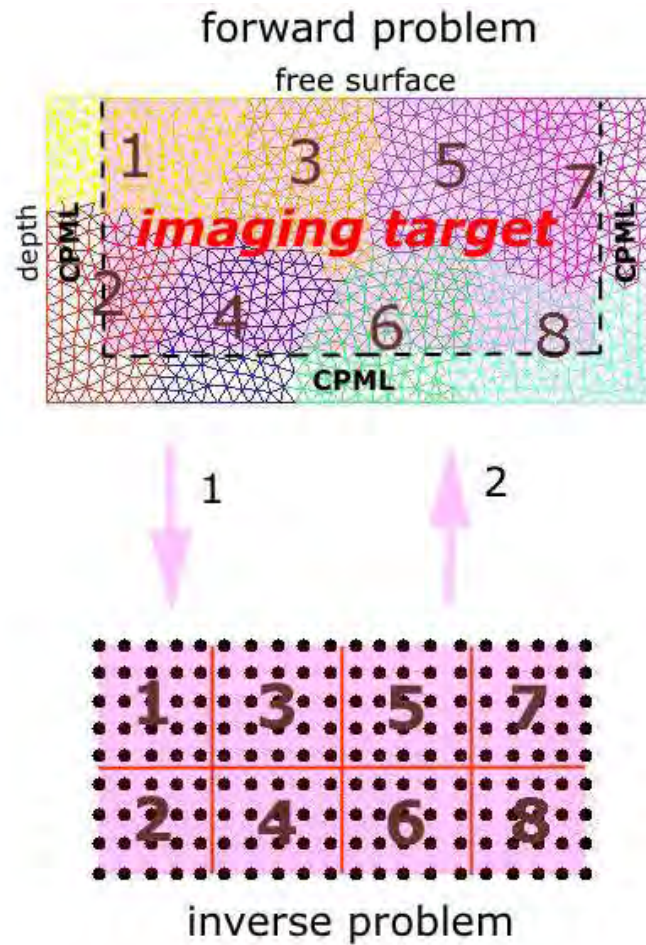


FIG. 5.1 – Illustration schématique en 2D du découplage entre le problème direct et le problème inverse. La partie supérieure de figure représente la discrétisation du problème direct par un maillage triangulaire. Le maillage a été partitionné en 8 sous-domaines (numérotés et de couleurs différentes). La zone que nous désirons imager (*imaging target*) est entourée par des couches absorbantes. La partie inférieure de la figure représente la discrétisation du problème inverse (uniquement de la zone à imager) par une grille cartésienne. Cette grille a également été partitionnée. Les échanges d'information entre les deux discrétisations se font par des **projections des champs d'onde** (flèche 1 : du problème direct au problème inverse) et des **projections des paramètres physiques** (flèche 2 : du problème inverse au problème direct).

dernier cas, on retrouve des expressions des gradients similaires à celles que nous avons proposées précédemment. Il faut souligner le bénéfice de telles approches, d'un point de vue méthodologique, qui permettent d'adapter la paramétrisation de l'inversion en fonction de zones d'intérêts spécifiques (réservoirs d'hydrocarbure, zones de subduction, etc.) afin d'obtenir, par exemple, une résolution optimale au sein de ces zones prédéfinies.

5.2.3 Du problème direct au problème inverse

En début de chapitre, nous avons évoqué l'interfaçage de méthodes numériques pour la propagation des ondes avec le processus de FWI. Pour réaliser cet interfaçage, nous procédons à des projections entre le modèle discret du problème direct et celui du problème inverse. Le premier type de projection que nous effectuons a pour objet la projection des champs d'onde (calculés en fréquence par TFD des champs temporels) du problème direct vers le problème inverse (flèche 1 dans la figure 5.1). Cette projection est réalisée pour l'ensemble des composantes des champs d'onde incidents et rétro-propagés qui interviennent dans l'expression du gradient (4.16) selon le paramètre que l'on inverse. Dans le cas de la méthode GD, cette projection est naturellement réalisée par l'intermédiaire des fonctions de base qui permettent d'extraire la valeur des champs en tout point de l'espace (dans le cas présent, en tous les points du problème inverse). Dans le cas de la méthode DF, on adopte une interpolation à partir d'un ensemble de points de la grille du problème direct selon la méthode de Hicks (2002).

Nous illustrons ce principe avec l'exemple du milieu acoustique que nous avons introduit plus haut (tableau 5.1). Pour la discrétisation du problème inverse, nous utilisons une grille cartésienne avec un pas $h = 50$ m (soit environ $\lambda_{min}/6$) dont les dimensions correspondent à celles du milieu initial sans les couches absorbantes. Le tableau 5.2 résume les principales caractéristiques relatives à la paramétrisation du problème direct et du problème inverse. Il est à noter que dans le cas de la méthode DF, nous avons fait coïncider la grille du problème direct et celle du problème inverse. Dans cet exemple, nous obtenons une réduction du nombre des paramètres physiques à considérer dans l'inversion d'environ 60 % par rapport au nombre des paramètres du modèle initial. A des fins de validation, la figure 5.2 montre que les gradients obtenus à partir des champs calculés avec les méthodes GD et DF, qui utilisent des discrétisations totalement différentes, sont quasiment identiques.

5.2.4 Et vice versa...

Le gradient obtenu après la première étape de projection est utilisé pour la recherche d'un nouveau modèle via l'estimation d'un pas de descente. Une fois le nouveau modèle déterminé, une seconde étape de projection consiste à projeter les paramètres du nouveau modèle de la discrétisation du problème inverse vers celle du problème direct afin de pouvoir calculer les champs d'onde pour l'itération suivante de la FWI. Pour réaliser

TAB. 5.2 – Paramétrisations du problème direct (avec les méthodes DF et GD) et du problème inverse dans le cas du modèle acoustique.

	Approche GD	Approche DF
Dimensions du modèle pour le problème direct ($x \times y \times z$)	10 km \times 10 km \times 5 km	10 km \times 10 km \times 5 km
h ou taille moyenne des éléments pour le problème direct	128 m	50 m
Nb paramètres physiques dans le problème direct	7.2 millions	12.3 millions
Dimensions de la zone à imager ($x \times y \times z$)	8 km \times 8 km \times 3 km	8 km \times 8 km \times 3 km
h pour le problème inverse	50 m	50 m
Nb paramètres physiques dans le problème inverse	4.8 millions	4.8 millions

cette seconde projection, nous procédons également à des interpolations entre les deux domaines. Pour la méthode des DF, une interpolation linéaire peut être effectuée si les deux discrétisations sont des grilles cartésiennes. En revanche, dans le cas de la méthode GD, il faut choisir la manière de procéder pour satisfaire l'approximation de paramètres constants par élément. Des essais ont montré que les meilleurs résultats étaient obtenus en associant à chaque élément la moyenne des propriétés évaluées aux noeuds des tétraèdres (les propriétés aux noeuds étant elles-mêmes évaluées par une interpolation linéaire à partir de la grille d'inversion).

5.3 Algorithme général

Il est utile de replacer les concepts que nous avons présentés plus haut au sein du processus global de la FWI. Pour cela, nous représentons les principales étapes de l'inversion sous la forme d'un pseudo-code (Algorithme 5.1). En premier lieu, figure une boucle sur les groupes de fréquences que l'on souhaite prendre en compte dans l'inversion. Au sein d'un groupe de fréquences, se trouvent une boucle sur les itérations et une seconde sur les sources. Vient ensuite le calcul du champ incident par la méthode explicite en temps que l'on a choisie. Pendant la modélisation du champ d'onde, les solutions fréquentielles sont extraites par TFD pour l'ensemble des fréquences du groupe de fréquences. Au terme de la modélisation, les champs fréquentiels sont projetés du problème direct vers le problème

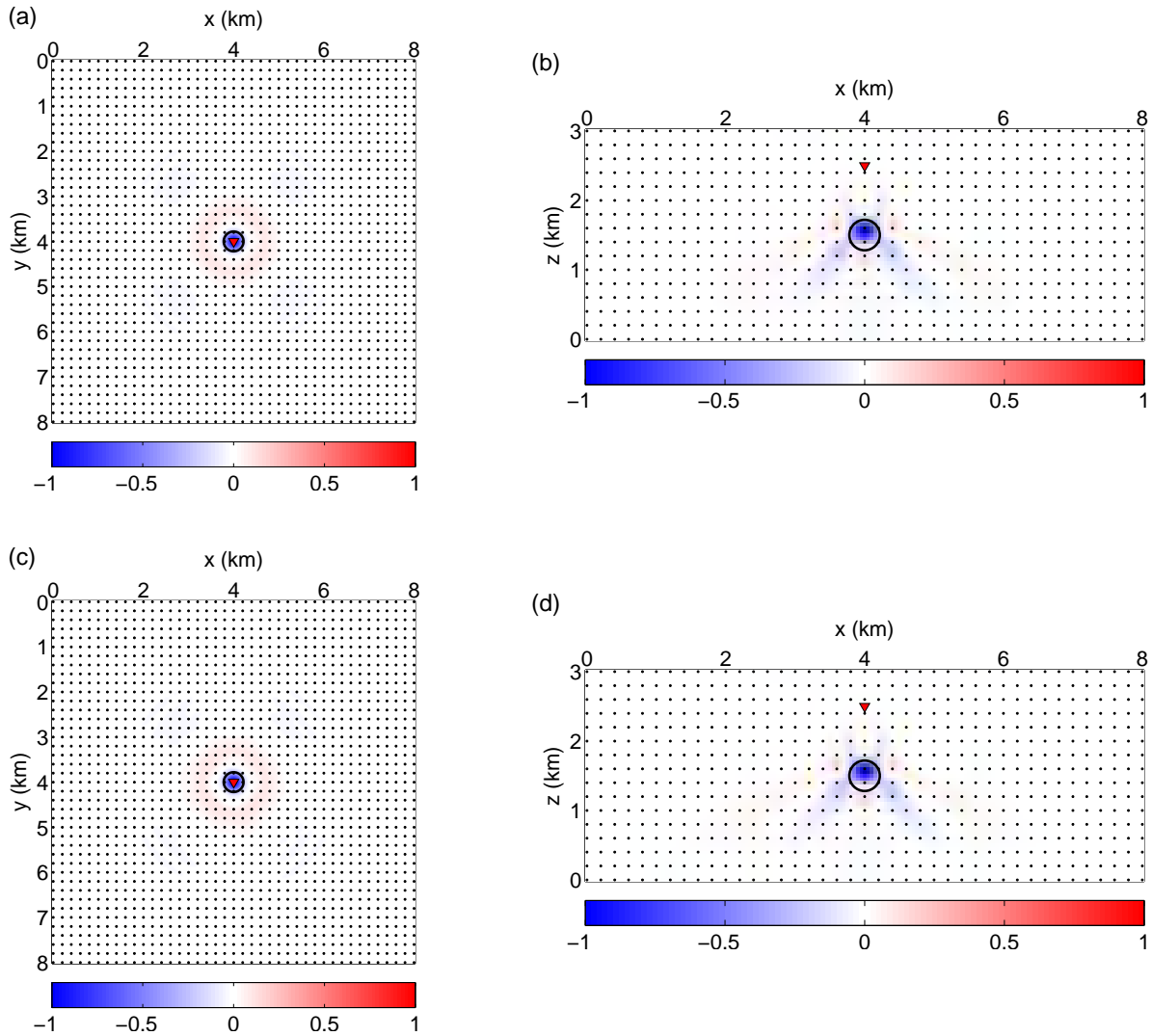


FIG. 5.2 – Coupes du gradient normalisé **calculé par la méthode DF** pour le paramètre V_P selon les plans xy (a) et xz (b) qui passent par le centre de l'hétérogénéité. 10 fréquences ont été utilisées (également réparties de 3 Hz à 13 Hz). Les positions des récepteurs sont indiquées par des points noirs et la position de la source par le triangle rouge. (c) et (d) Idem (a) et (b) avec le gradient **calculé par la méthode GD**.

inverse. Les résidus sont calculés en fréquence et sont injectés, via une TFD inverse, dans le schéma temporel explicite. On procède alors au calcul des champs fréquentiels relatifs à la rétro-propagation des résidus de manière identique au champ incident. A partir des solutions fréquentielles des champs incidents et rétro-propagés, le calcul du gradient s'effectue selon l'expression (4.39). Ce gradient est mis à jour pour toutes les sources sismiques. Lorsque toutes les sources ont été prises en compte, le gradient obtenu est

Algorithm 5.1 Algorithme global de la FWI

```

1: for i_freq_group = 1 to nb_frequency_group do
2:   for i_iter = 1 to nb_max_iteration do
3:     for i_src = 1 to nb_sources do
4:       ⇒ calcul du champ incident par une méthode explicite en temps
5:       for i_time = 1 to nb_time_step do
6:         calcul du champ au pas de temps i_time
7:         mise à jour des solutions fréquentielles par TFD  $\forall$  freq.  $\in$  i_freq_group
8:       end for
9:       ⇒ projections des champs en fréquence (pb. direct vers pb. inverse)
10:      ⇒ calcul des résidus
11:      ⇒ calcul du champ rétro-propagé par une méthode explicite en temps
12:      for i_time = nb_time_step to 1 do
13:        calcul du champ au pas de temps i_time
14:        mise à jour des solutions fréquentielles par TFD  $\forall$  freq.  $\in$  i_freq_group
15:      end for
16:      ⇒ projections des champs en fréquence (pb. direct vers pb. inverse)
17:      ⇒ mise à jour du gradient selon l'équation (4.39)  $\forall$  freq.  $\in$  i_freq_group
18:    end for
19:    ⇒ recherche du nouveau modèle selon l'équation (4.42)
20:    ⇒ projection des paramètres (pb. inverse vers pb. direct)
21:  end for
22: end for

```

utilisé pour la recherche du nouveau modèle (par ajustement parabolique de la fonction coût). Le nouveau modèle est alors projeté du problème inverse vers le problème direct. Cette dernière projection conclut l'itération courante de l'inversion.

L'algorithme que nous venons de décrire comporte les principales tâches effectuées dans l'inversion. Pour être complet, il faut rajouter dans cet algorithme, les aspects liés au préconditionnement des données (comme une boucle sur des fenêtrages temporels qui se trouverait en dessous de la boucle sur les itérations), au préconditionnement du gradient par lissage Gaussien, à la régularisation de l'inversion par des contraintes a priori (amortissement, contraintes de puits) ou encore à l'estimation de la source (qui consiste à corriger les données calculées afin de pouvoir évaluer correctement les résidus, Pratt (1999)).

5.4 Quelques applications dans des cas simples

Nous illustrons dans cette partie des applications potentielles de la méthode que nous avons développée. Nous présentons en particulier le calcul des gradients dans des milieux acoustiques et élastiques par la méthode DF (pour des milieux typiquement rencontrés en géophysique pétrolière) ainsi que le calcul du gradient dans un modèle sphérique par la méthode GD (cas de la sismologie globale). Par ailleurs, dans l'ensemble des tests qui vont suivre, nous n'utiliserons qu'une seule source sismique. Bien que cela ne reflète pas des conditions expérimentales habituelles, nous avons fait ce choix pour des raisons pratiques afin de réduire les temps de calcul. Ces tests nous permettent d'analyser l'effet de l'acquisition (position de la source et des récepteurs) sur la construction des gradients.

5.4.1 Inversion avec les différences finies

5.4.1.1 Cas I : modèle acoustique

Description du modèle

On considère un milieu acoustique de dimensions $8 \text{ km} \times 8 \text{ km} \times 3 \text{ km}$ en xyz respectivement. La figure 5.3 représente des sections horizontale et verticale du modèle de vitesse V_P . Le milieu est constitué d'un encaissant homogène ($V_P = 4500 \text{ m/s}$) et contient 32 hétérogénéités sphériques régulièrement espacées, de diamètre 400 m avec $V_P = 4500 \pm 500 \text{ m/s}$. La densité est constante ($\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$). Des couches absorbantes de type CPML et d'épaisseur 1 km ont été ajoutées à chaque bord du modèle. Par conséquent, les dimensions complètes du modèle numérique sont $10 \text{ km} \times 10 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ en xyz respectivement. Par ailleurs, nous utilisons les paramétrisations du problème direct et du problème inverse indiquées dans le tableau 5.2 en ce qui concerne la méthode DF.

Cas d'une acquisition en surface

On considère tout d'abord une acquisition comprenant 6 561 récepteurs (capteurs de pression) régulièrement espacés dans le plan xy (l'espacement entre les récepteurs est de 100 m). Pour la source sismique, nous utilisons une fonction source de type Ricker avec une fréquence dominante de 5 Hz (son spectre s'étend jusqu'à environ 13 Hz). La figure 5.4 montre le gradient obtenu à la première itération de l'inversion en prenant en compte 20 fréquences entre 3 Hz et 13 Hz. On peut constater dans ce gradient, une

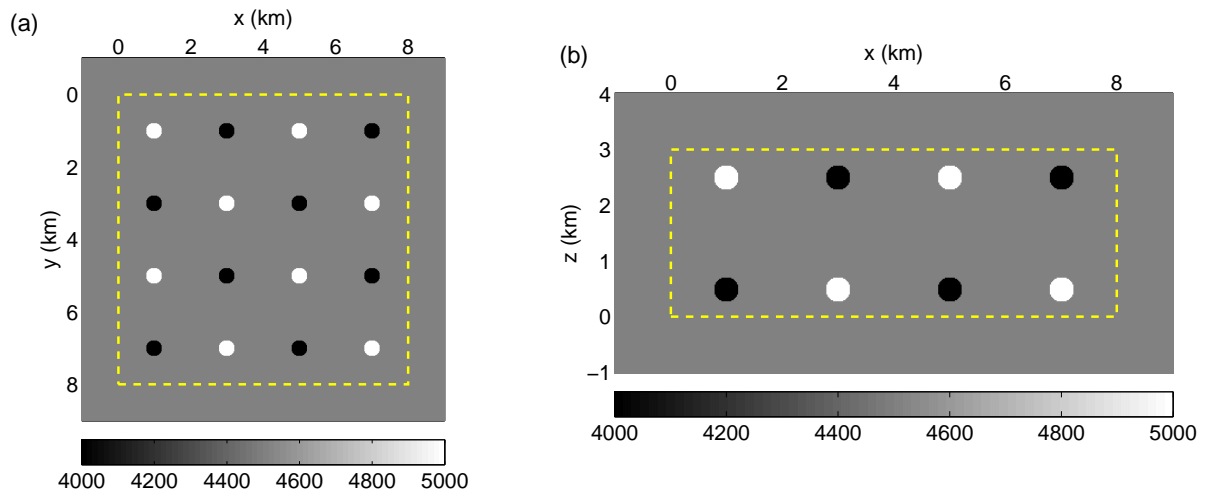


FIG. 5.3 – (a) Section du **modèle acoustique** (vitesse V_P) dans le plan xy ($z = 2.5$ km). Les limites des couches absorbantes sont indiquées par des lignes pointillées jaunes. L'échelle de vitesse est en m/s. (b) Idem (a) dans le plan xz ($y = 1$ km).

bonne relocalisation des hétérogénéités proches du plan des récepteurs. En revanche, on n'observe pas de perturbations notables au niveau des hétérogénéités situées dans la partie inférieure du modèle. On peut supposer que les résidus sont principalement dominés par les hétérogénéités supérieures et que par conséquent, les itérations suivantes de l'inversion permettront une reconstruction des hétérogénéités inférieures. Afin de valider cette hypothèse, nous effectuons un test similaire dans un modèle qui contient des hétérogénéités uniquement dans sa partie inférieure. Le résultat obtenu, représenté dans la figure 5.5, montre effectivement la présence de perturbations au niveau des hétérogénéités. On constate néanmoins que ces perturbations sont moins bien localisées que les perturbations associées aux hétérogénéités supérieures de la figure 5.4. Les hétérogénéités profondes sont imagées en réflexion uniquement, avec des angles d'ouverture faibles, si bien que l'on obtient une reconstruction à bande passante très limitée. Par ailleurs, une seconde limitation de l'éclairage provient du fait que l'on n'utilise qu'une seule source. On peut constater, en ce qui concerne les hétérogénéités à gauche et à droite, que l'on ne reconstruit que la 'face' des sphères correspondant à la réflexion spéculaire contrainte par la position de la source. Les segments des réflecteurs sont pentés tandis que pour les deux hétérogénéités centrales, ils sont quasi-horizontaux (ils auraient été parfaitement horizontaux pour une sphère située à la verticale de la source).

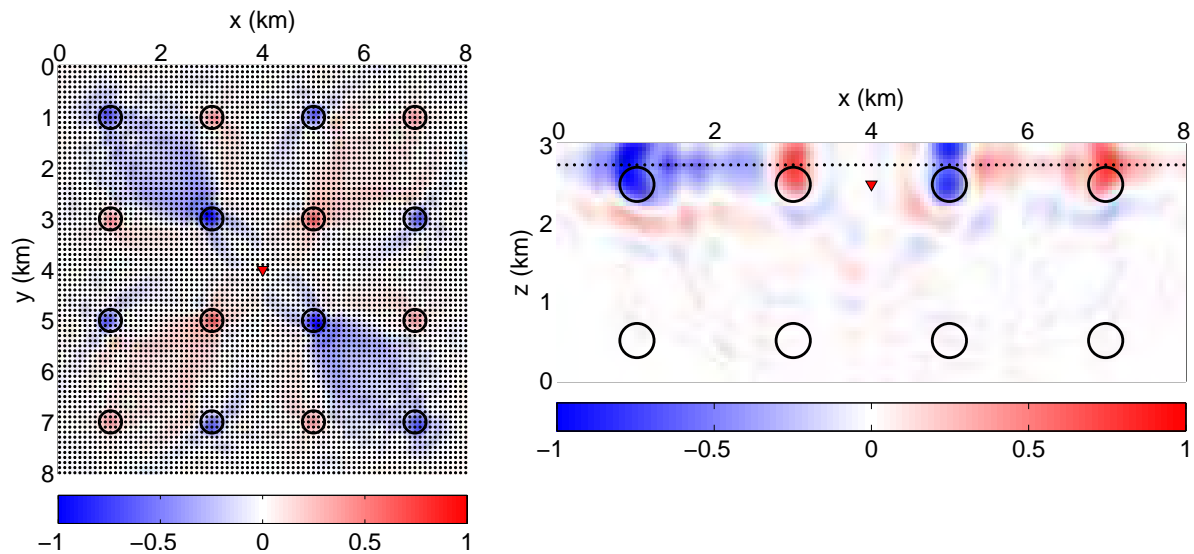


FIG. 5.4 – Coupes du gradient normalisé pour le paramètre V_P selon les plans xy (à gauche avec $z = 2.5$ km) et xz (à droite avec $y = 1$ km). 20 fréquences ont été utilisées (également réparties entre 3 Hz et 13 Hz). Les positions des récepteurs sont indiquées par des points noirs (**acquisition comprenant 6 561 récepteurs régulièrement répartis dans le plan xy**) et la position de la source par le triangle rouge. Les contours des hétérogénéités du vrai modèle sont représentés par des cercles noirs.

Cas d'une acquisition englobante

Dans ce test, on utilise une acquisition comprenant 18 752 récepteurs régulièrement répartis sur un cube qui englobe les hétérogénéités (l'espacement entre les récepteurs est de 100 m). On constate, dans la figure 5.6, une bonne relocalisation de toutes les hétérogénéités, aussi bien dans le plan inférieur que dans le plan supérieur, confirmant le déficit de l'éclairage du dispositif d'acquisition standard en surface. On peut remarquer que ce type d'acquisition reflète davantage les situations rencontrées en imagerie médicale (comme dans le cas d'un scanner qui permet un éclairage du corps humain à 360°). Malheureusement, en géophysique, la situation est tout autre et l'on ne dispose en général que d'une information partielle acquise d'un 'seul côté' des milieux que l'on souhaite imager.

Cas d'une acquisition volumique

Pour illustrer le cas d'un éclairage quasi-parfait, on considère une acquisition volumique avec 26 896 récepteurs régulièrement répartis dans tout le volume du modèle

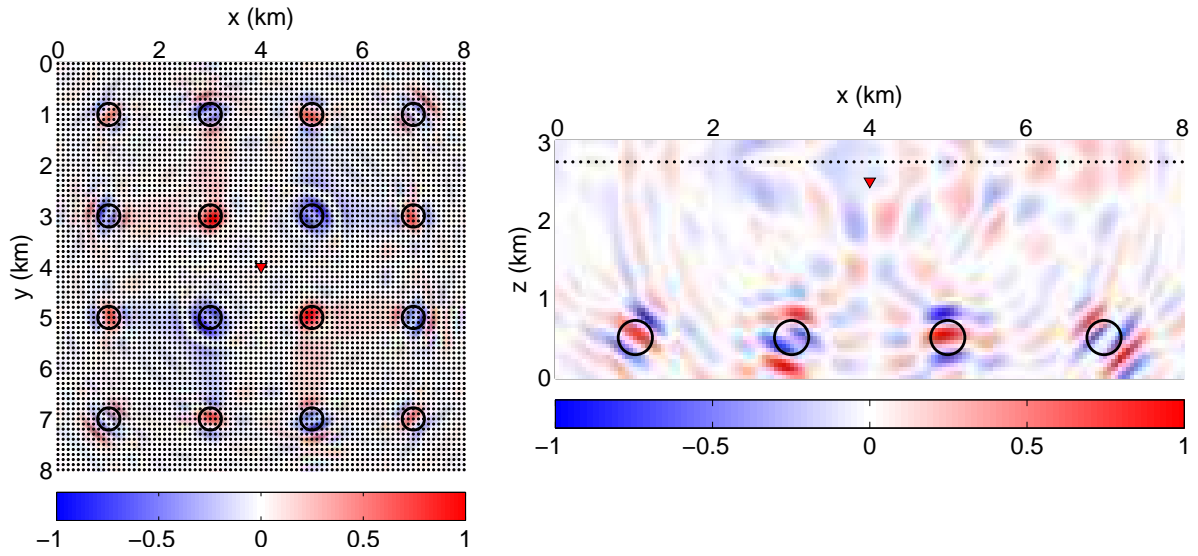


FIG. 5.5 – Idem figure 5.4 pour un modèle qui contient des hétérogénéités uniquement dans sa partie inférieure. A gauche, la coupe est selon le plan xy (avec $z = 0.5$ km) et à droite, la coupe est selon le plan xz (avec $y = 1$ km).

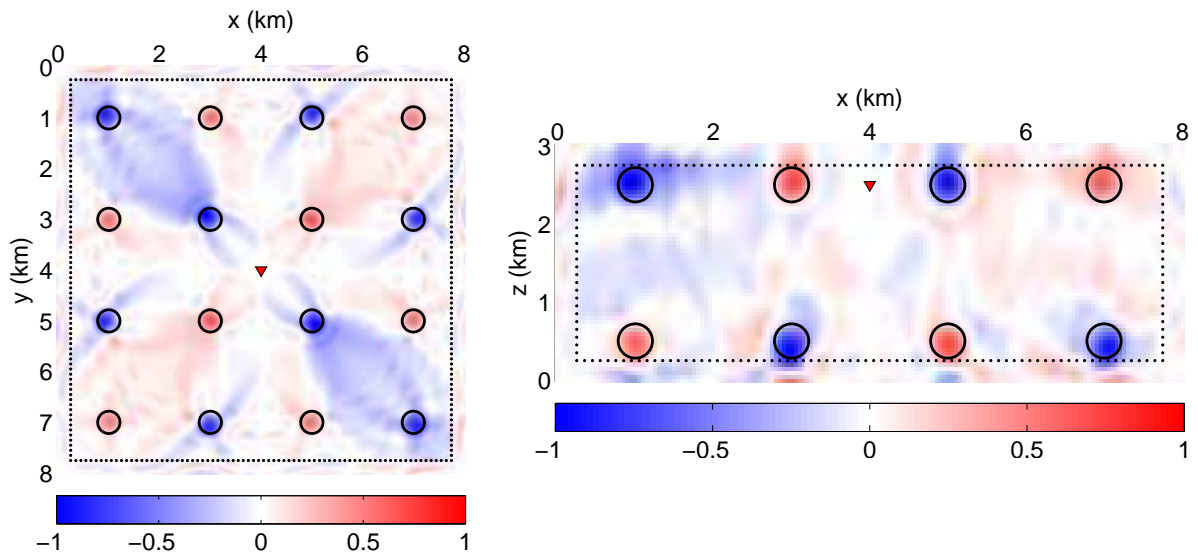


FIG. 5.6 – Idem figure 5.4 avec une acquisition comprenant 18 752 régulièrement répartis sur un cube.

(l'espacement entre les récepteurs est de 200 m). Le résultat présenté dans la figure 5.7, montre une nette amélioration de la résolution spatiale des perturbations par rapport à

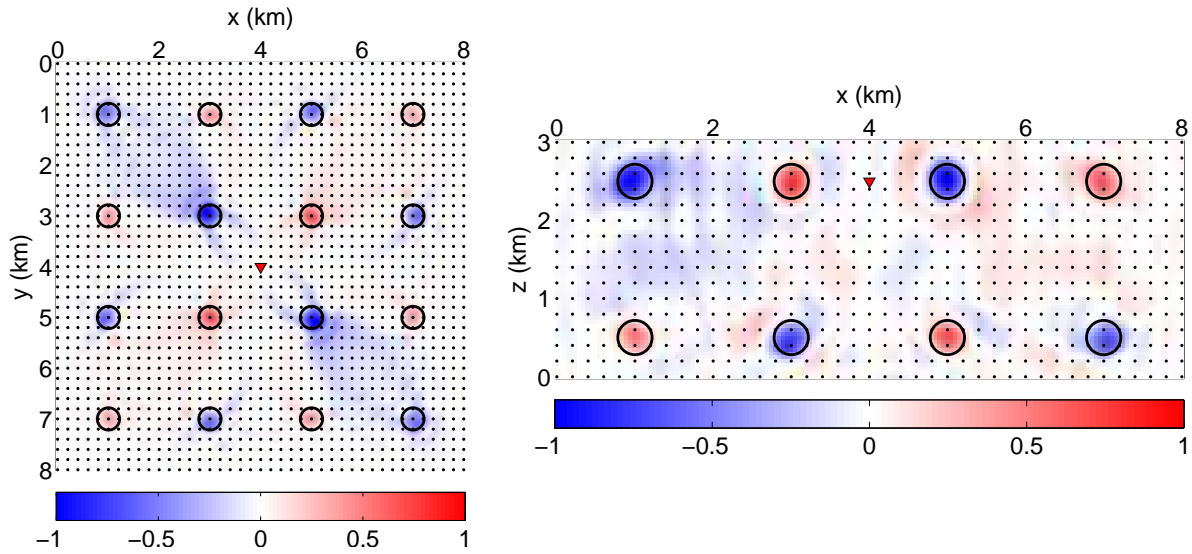


FIG. 5.7 – Idem figure 5.4 avec une acquisition comprenant 26 896 récepteurs régulièrement répartis dans tout le volume du modèle.

la figure 5.6.

5.4.1.2 Cas II : modèle élastique

Description du modèle

On considère un milieu élastique de dimensions similaires au cas précédent. La figure 5.8 représente des sections horizontale et verticale du modèle de vitesse V_S . Le milieu est constitué d'un encaissant homogène ($V_P = 6000$ m/s et $V_S = 3500$ m/s) et contient 32 hétérogénéités sphériques régulièrement espacées, de diamètre 400 m avec $V_S = 3500 \pm 500$ m/s. Comme dans le cas précédent, la densité est constante ($\rho = 2000$ kg/m³). Nous utilisons une paramétrisation du problème direct et du problème inverse identique au cas précédent.

Résultats numériques

La figure 5.9 montre le gradient relatif au paramètre V_S dans le cas de l'acquisition idéale. Les récepteurs sont repartis dans tout le volume du modèle et sont ici de type capteur de vitesse à 3 composantes. On peut observer que les perturbations présentes dans le gradient de V_S sont mieux définies que dans le cas du modèle acoustique (figure

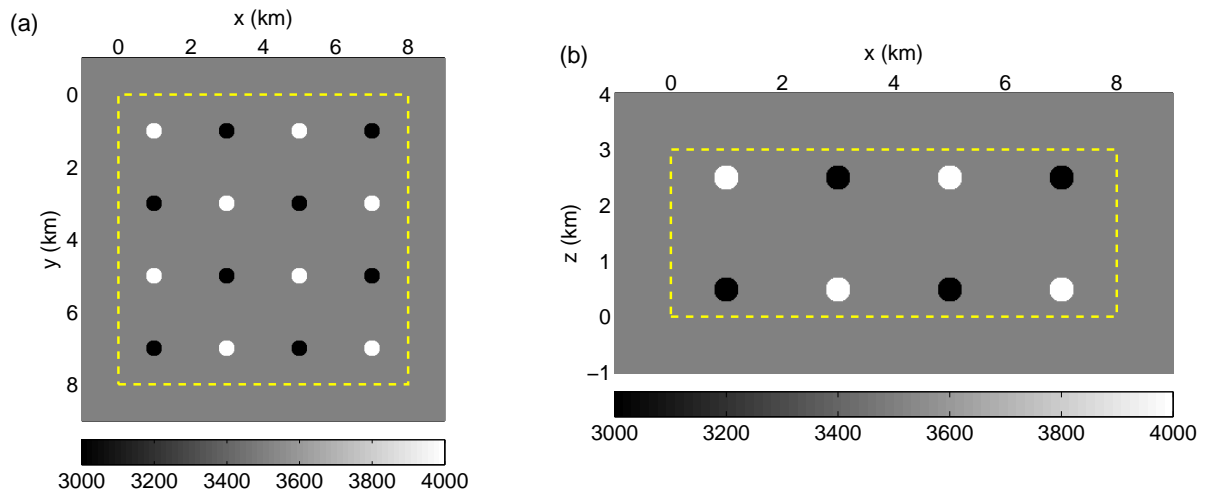


FIG. 5.8 – (a) Section du **modèle élastique** (vitesse V_S) dans le plan xy ($z = 2.5$ km). Les limites des couches absorbantes sont indiquées par des lignes pointillées jaunes. L'échelle de vitesse est en m/s. (b) Idem (a) dans le plan xz ($y = 1$ km).

5.7). Cette meilleure résolution provient de la longueur d'onde des ondes S qui participent à la reconstruction des hétérogénéités et qui sont de taille inférieure à celle des ondes P.

5.4.2 Inversion avec les éléments finis discontinus

5.4.2.1 Description du modèle

Le modèle est une sphère d'un diamètre de 5 km. Il s'agit d'un modèle acoustique. L'origine du repère se trouve au centre de la sphère (le pôle Nord-Sud de la sphère est l'axe z). La figure 5.10 représente des sections horizontale et verticale du modèle de vitesse V_P . Le milieu est constitué d'un encaissant homogène ($V_P = 4500$ m/s) et contient des hétérogénéités sphériques régulièrement espacées, de diamètre 400 m avec $V_P = 4500 \pm 500$ m/s. La densité est constante ($\rho = 2000$ kg/m³). A la surface de la sphère, on applique la condition de surface libre.

5.4.2.2 Construction du maillage

Le maillage tétraédrique de la sphère (figure 5.11) a été réalisé avec des tétraèdres dont la moyenne des côtés est 100 m afin d'obtenir une discrétisation d'environ 3 éléments / λ_{min} (on considère une source sismique avec une fréquence maximum de 13 Hz). Le

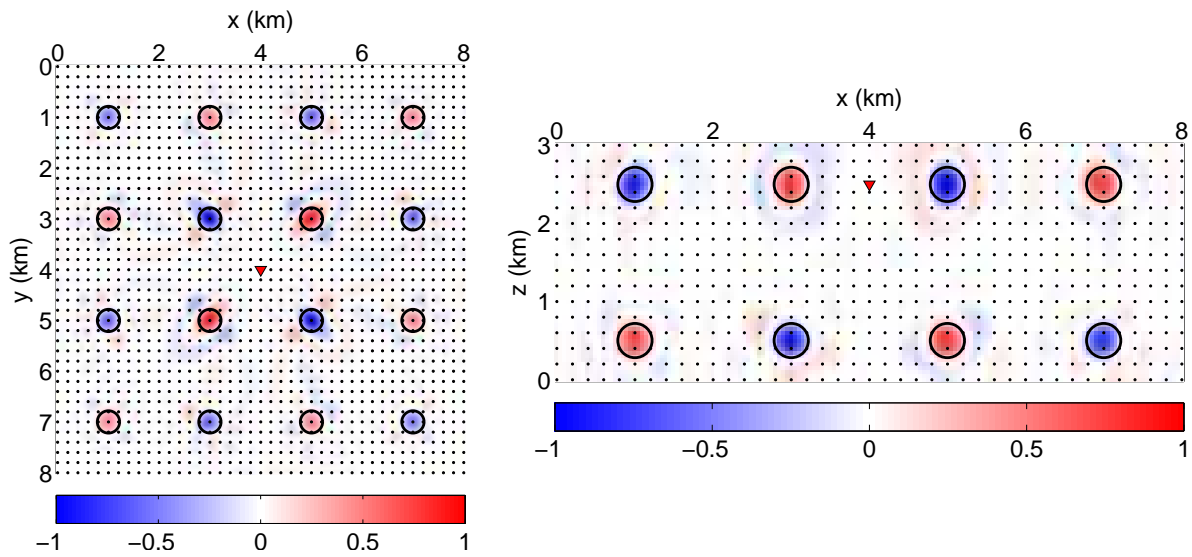


FIG. 5.9 – Coupes du gradient normalisé pour le **paramètre** V_S selon les plans xy (à gauche avec $z = 2.5$ km) et xz (à droite avec $y = 1$ km). 20 fréquences ont été utilisées (également réparties entre 3 Hz et 13 Hz). Les positions des récepteurs sont indiquées par des points noirs (acquisition comprenant 26 896 récepteurs régulièrement répartis dans tout le volume du modèle) et la position de la source par le triangle rouge.

tableau 5.3 présente les statistiques concernant ce maillage. Une coupe du maillage (figure 5.12.a) montre que les éléments ont tendance à avoir une taille plus réduite au centre de la sphère.

TAB. 5.3 – Statistiques concernant la modélisation du problème direct par la méthode GD dans le modèle sphérique acoustique. Les calculs ont été réalisés avec des processeurs octo-pro dual core Opteron 2,6 Ghz.

Temps de modélisation	2 s
Nb éléments	632 979
Ordre en espace	P_2
Nb inconnues	57 millions
Min. / Moy. / Max. longueur élément	45 / 100 / 202 m
Nb de pas en temps	4 168
Nb CPUs	32
Temps de calcul	30 min.

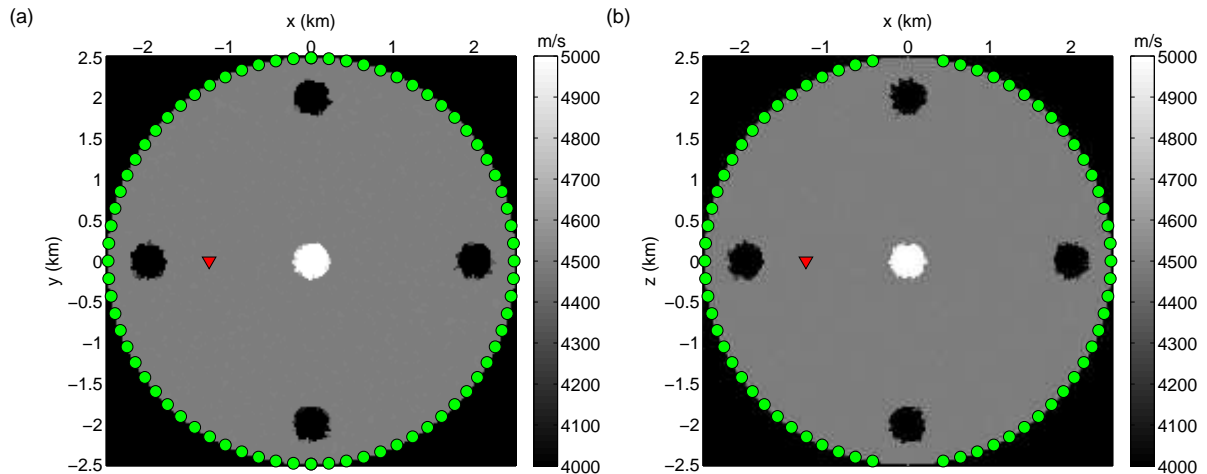


FIG. 5.10 – (a) Section du **modèle acoustique** (vitesse V_P) de forme sphérique dans le plan xy qui passe au milieu de la sphère ($z = 0$ km). La position de la source est indiquée par le triangle rouge et celles des récepteurs par des points verts. Les zones noires en dehors du cercle représentent des zones vides (en hors du modèle). (b) Idem (a) dans le plan xz (avec $y = 0$ km).

5.4.2.3 Dispositif d'acquisition

Le dispositif d'acquisition, représenté sur la figure 5.13, comporte 2409 récepteurs distribués à la surface de la sphère. On note une concentration plus élevée des récepteurs près des pôles de la sphère. Dans cette expérience, les récepteurs sont des capteurs de pression. Quant à la source sismique, elle est de type explosive et localisée à l'intérieur de la sphère, à mi-distance entre le centre et la surface (figure 5.10).

5.4.2.4 Résultats numériques

Caractérisation de la source

Le premier test que nous présentons repose sur le principe du renversement temporel des données. En effet, l'ensemble des récepteurs que nous avons placés à la surface de la sphère peut être employé comme un miroir à renversement temporel (Fink, 1993). La ré-émission des données enregistrées en chaque récepteur (en sens inverse du temps) engendre un champ d'onde qui va se refocaliser à la source. Ce principe a été utilisé par Larmat *et al.* (2006) pour la caractérisation de la rupture du grand séisme de Sumatra (26 décembre 2004). Ces auteurs ont été les premiers à appliquer le principe du retournement

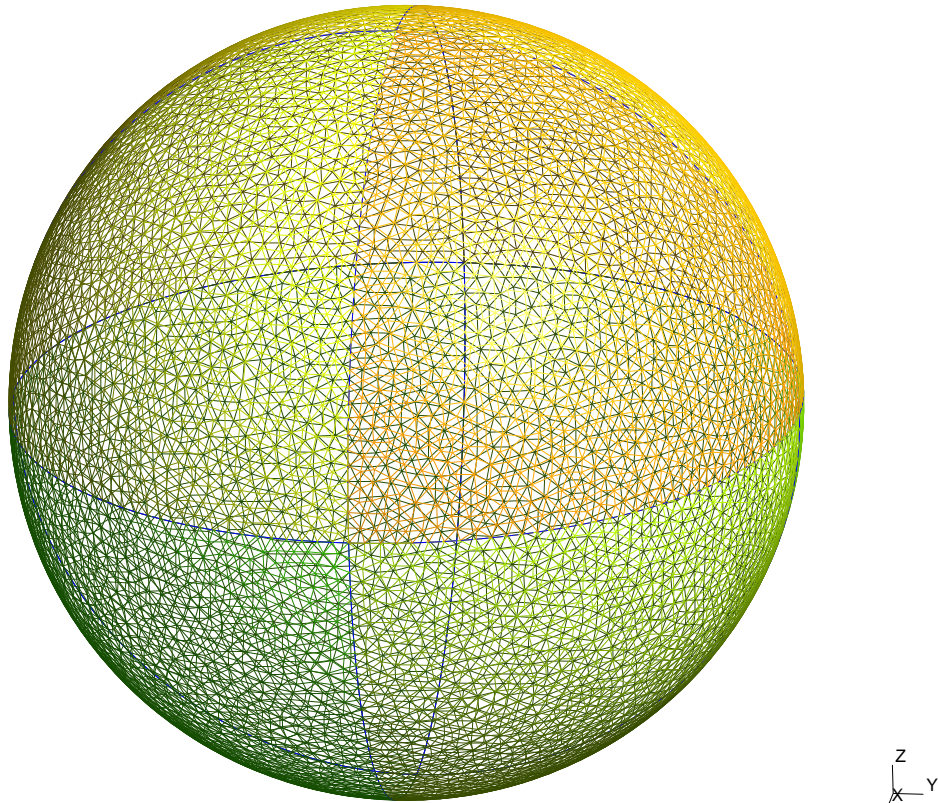


FIG. 5.11 – Maillage tétraédrique de la sphère. Des tétraèdres de 100 m de côté ont été employés. La surface de la sphère est définie par un ensemble d’arcs de cercle qui définissent 8 secteurs. Le maillage a été réalisé par l’outil GMSH (Geuzaine & Remacle, 2009).

temporel de données sismiques à l’échelle globale par la méthode SEM. La figure 5.14 illustre ce principe en utilisant la méthode GD que nous avons développée. Dans la colonne de gauche, nous pouvons observer la propagation du champ incident issu de la source dans le vrai modèle (pour cette application particulière, nous prenons le vrai modèle en tant que modèle \mathbf{m}_0). On peut remarquer la refocalisation partielle de ce champ à la position symétrique de la source par rapport au centre de la sphère (à $t = 1.8$ s). En réalité, cette refocalisation serait parfaite dans un ellipsoïde au cas où la source est un foyer de cet ellipsoïde (la refocalisation serait alors observée au niveau du second foyer). Dans la colonne du milieu, il s’agit du champ issu de la rétro-propagation des données aux récepteurs. Si l’on parcourt cette colonne du temps maximum au temps initial (de bas en haut), on observe que le champ rétro-propagé, prend progressivement la forme du champ incident et se refocalise à la position exacte de la source. Cette cohérence

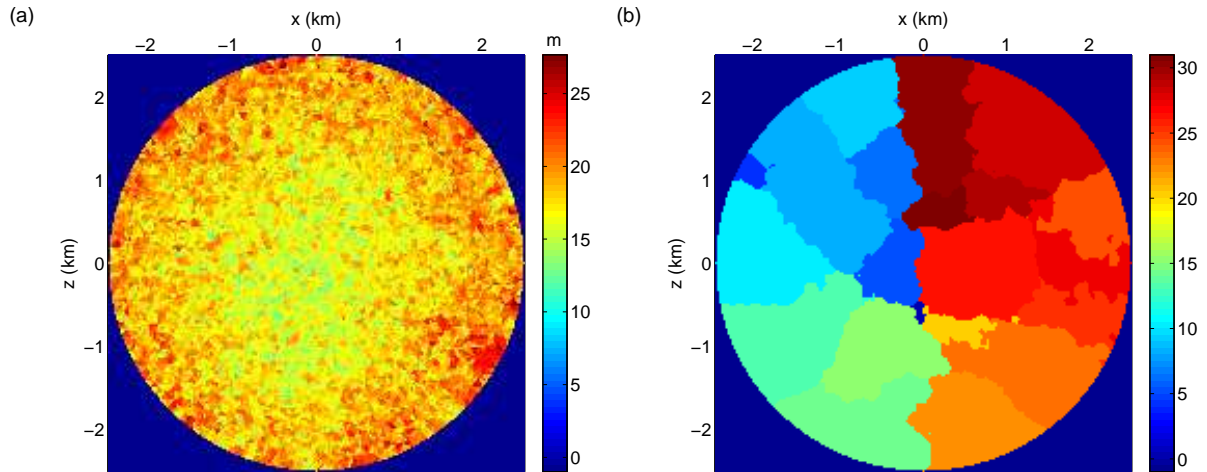


FIG. 5.12 – (a) Coupe du maillage dans le plan xz qui passe au milieu de la sphère et qui montre le rayon de la sphère inscrite dans chaque élément. (b) Idem (a) où la coupe montre le partitionnement du maillage avec 32 sous-domaines.

spatio-temporelle des deux champs se vérifie dans la colonne de droite de la figure (qui représente le produit du champ incident avec le champ rétro-propagé à chaque temps) où l'on observe une amplitude maximale à la position de la source pour $t = 0.2$ s.

En ce qui concerne la discrétisation du problème inverse, nous avons employé, pour des raisons pratiques, une grille cartésienne de dimension $5 \text{ km} \times 5 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ avec un pas de 25 m (environ la moitié des points sont en dehors de la sphère et n'interviennent pas dans la construction du gradient). On peut alors appliquer le calcul du gradient associé au paramètre V_P et obtenir une parfaite localisation de la source comme on peut le voir sur la figure 5.15. Afin de localiser la source, nous avons omis d'appliquer le pseudo-Hessien qui a pour effet d'effacer l'empreinte de cette dernière. On note ici, que le gradient permet de vérifier la cohérence entre la position de la source que nous avons supposée (pour le calcul du champ incident) et la position déterminée par la rétro-propagation des données. Sans connaissance à priori de la source, seule l'étude du champ rétro-propagé permet de retrouver les caractéristiques de la source.

Caractérisation du milieu hétérogène

Le deuxième test que nous présentons est une application standard du principe de la FWI. Comme pour le cas précédent, nous représentons dans la figure 5.16, dans la colonne de gauche, des instantanés du champ incident calculé dans un modèle homogène

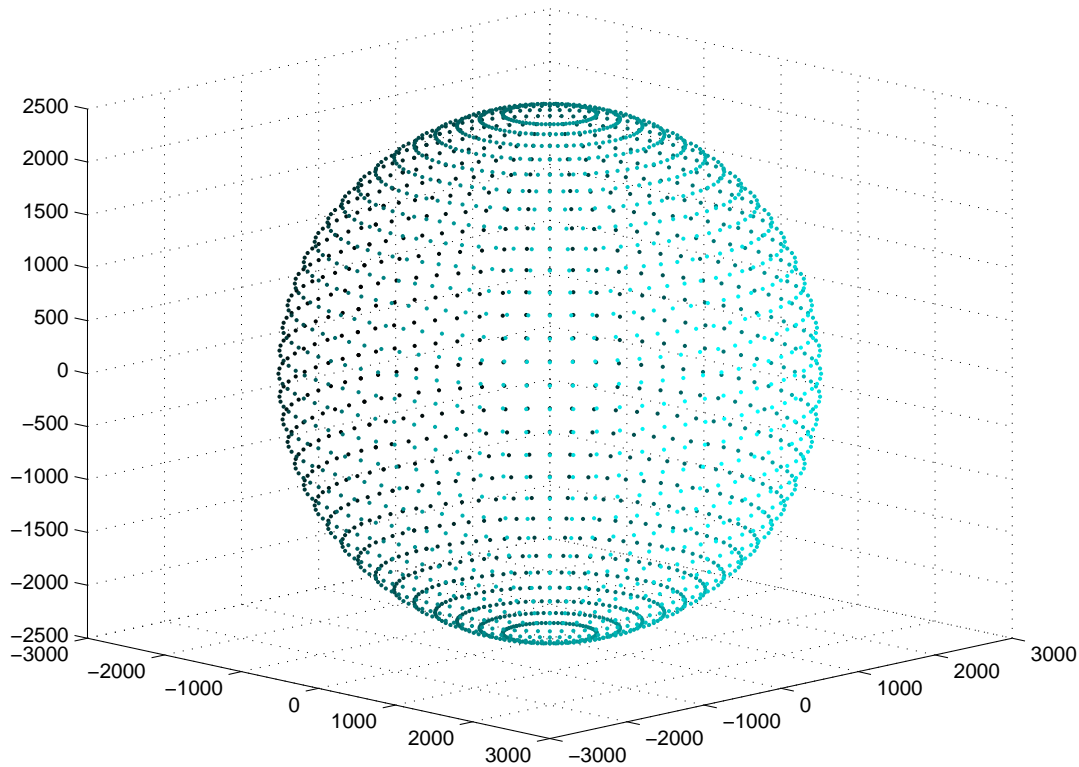


FIG. 5.13 – La répartition des 2409 récepteurs sur la sphère a été réalisée en distribuant les récepteurs selon des méridiens (de -180° à 180°) et des parallèles (de -80° à 80°) espacés de 5° . Le pôle Nord-Sud de la sphère est l'axe z (axe vertical de la figure).

($V_P = 4500$ m/s) et dans la colonne du milieu, des instantanés du champ issu de la rétro-propagation des résidus. Comparativement à la figure 5.14, le front d'onde du champ rétro-propagé converge plus nettement au niveau des hétérogénéités. On retrouve par conséquent une amplitude significative au niveau des hétérogénéités dans la colonne de droite (comme c'est le cas à $t = 0.6$ s, pour l'hétérogénéité située dans la partie gauche de la sphère). Dans le gradient du paramètre V_P , représenté sur la figure 5.17, on retrouve globalement toutes les hétérogénéités, exceptée celle qui se situe du côté opposé de la source. L'étude du pseudo-Hessien (figure 5.18) révèle que cette hétérogénéité se trouve dans la zone où la source se refocalise partiellement. Par conséquent, la prise en compte du pseudo-Hessien a pour effet de réduire très fortement l'amplitude de la perturbation à cet endroit. On peut penser que cet effet sera compensé en utilisant plusieurs sources (car la refocalisation est différente pour chaque source).

Nous concluons ici, la présentation des concepts que nous avons mis en oeuvre dans un code informatique pour l'inversion des formes d'onde. Toutefois, il reste certains aspects

à intégrer et valider dans cet outil afin de pouvoir passer à des simulations réalistes, d'abord dans des cas synthétiques, ensuite dans des cas réels. En raison de l'ampleur des développements informatiques et des mises au point que cela suppose, la finalisation de l'outil devra se poursuivre au delà du cadre de cette thèse.

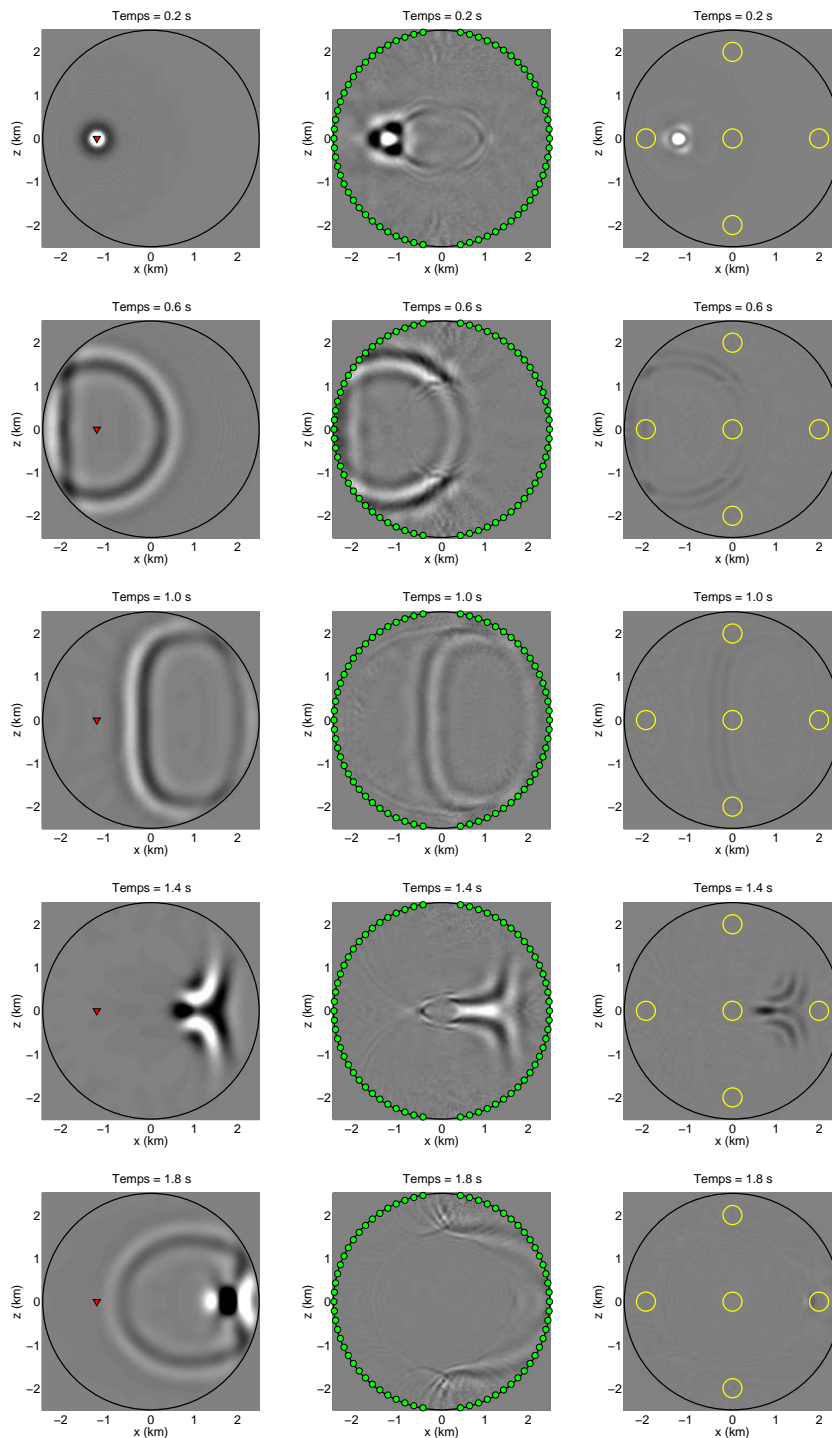


FIG. 5.14 – Colonne de gauche : instantanés du champ de pression incident issu de la source explosive (triangle rouge) dans le **vrai modèle**. Le temps est indiqué au dessus de chaque instantané et le plan de visualisation est le plan xz qui passe par le centre de sphère. Colonne du milieu : Idem avec le champ de pression engendré par la **rétro-propagation des données** émises depuis la position des récepteurs (points verts). Colonne de droite : produit du champ incident et du champ rétro-propagé. Les contours des hétérogénéités du vrai modèle sont représentés par des cercles jaunes.

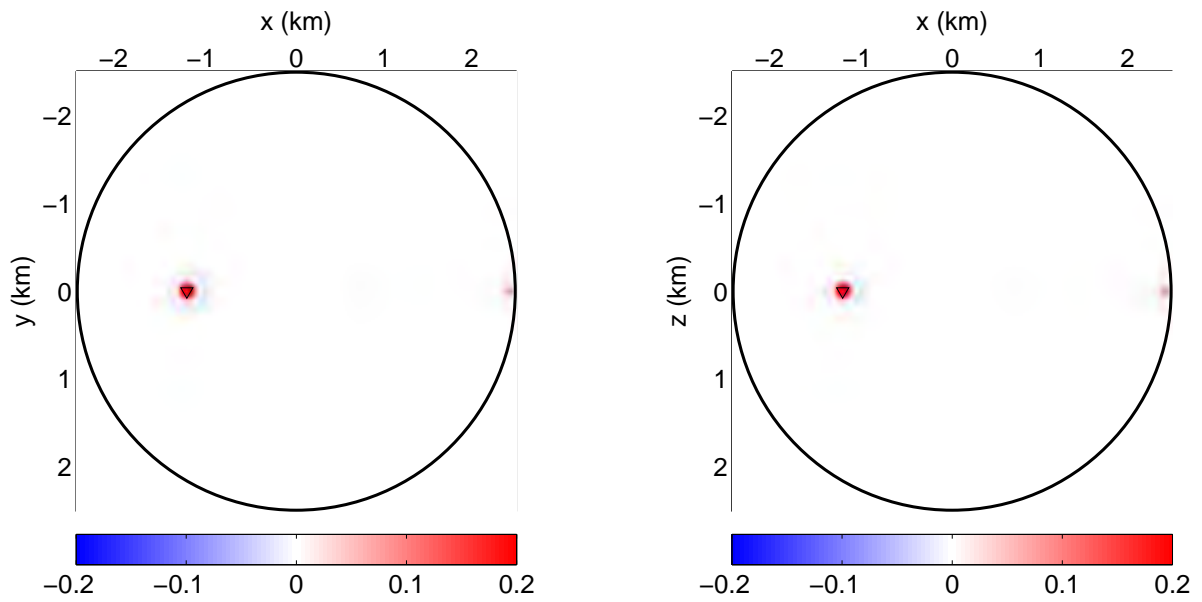


FIG. 5.15 – Coupes du gradient du paramètre V_P dans le cas où l'on rétro-propage les données dans le vrai modèle. Ce gradient a été évalué avec 10 fréquences (de 3 Hz à 13 Hz) et sans prise en compte du pseudo-Hessien. La position de la source est indiquée par un triangle noir. À gauche, le plan de visualisation est le plan xy qui passe par le centre de sphère, à droite ; il s'agit du plan xz .

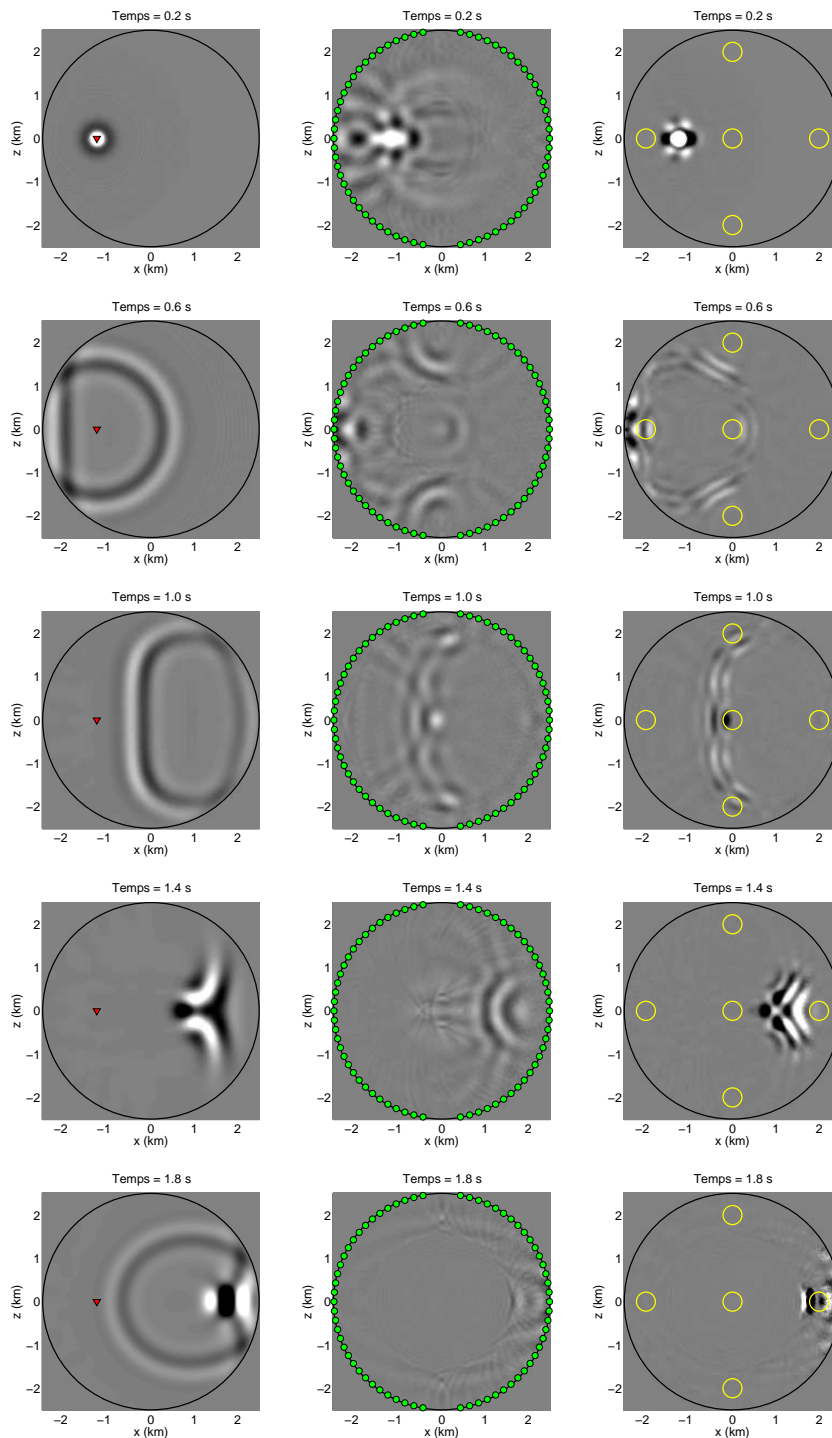


FIG. 5.16 – Colonne de gauche : instantanés du champ de pression incident issu de la source explosive (triangle rouge) dans un **modèle homogène**. Le temps est indiqué au dessus de chaque instantané et le plan de visualisation est le plan xz qui passe par le centre de sphère. Colonne du milieu : Idem avec le champ de pression engendré par la **rétro-propagation des résidus** émis depuis la position des récepteurs (points verts). Colonne de droite : produit du champ incident et du champ rétro-propagé. Les contours des hétérogénéités du vrai modèle sont représentés par des cercles jaunes.

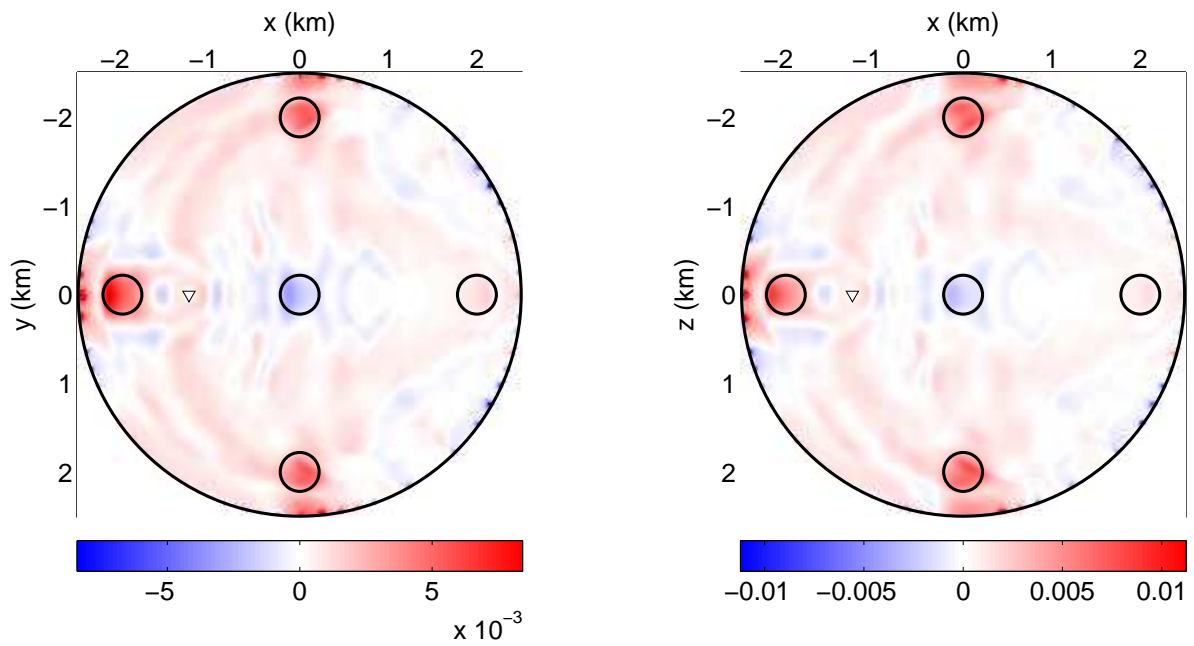


FIG. 5.17 – Coupes du gradient du paramètre V_P dans le cas où l'on rétro-propage les résidus dans le modèle homogène. Ce gradient a été évalué avec 10 fréquences (de 3 Hz à 13 Hz) en prenant en compte le pseudo-Hessien. La position de la source est indiquée par un triangle noir et les contours des hétérogénéités par des cercles noirs. A gauche, le plan de visualisation est le plan xy qui passe par le centre de sphère, à droite; il s'agit du plan xz .

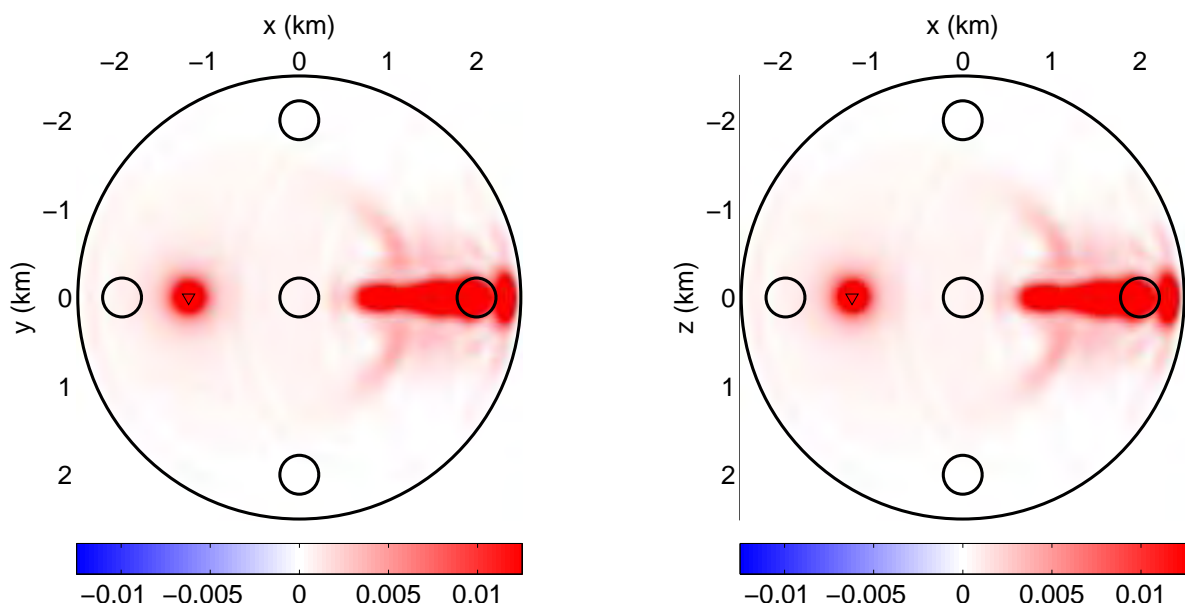


FIG. 5.18 – Coupes du pseudo-Hessien. La position de la source est indiquée par un triangle noir et les contours des hétérogénéités par des cercles noirs. A gauche, le plan de visualisation est le plan xy qui passe par le centre de sphère ; à droite, il s'agit du plan xz .

Conclusions et perspectives

Conclusions sur le problème direct

Nous avons présenté une formulation par éléments finis discontinus (méthode par approximation Galerkin discontinue, GD) pour la résolution du système élasto-dynamique (formulé en vitesse-contrainte) à 3 dimensions dans le domaine temporel. Notre approche a été développée avec des bases nodales et avec des maillages tétraédriques afin de pouvoir réaliser des maillages adaptatifs où la discrétisation est fonction des caractéristiques des milieux géologiques étudiés. En particulier, nous nous intéressons à la modélisation sismique en présence de topographies ou d'interfaces à la géométrie complexe ainsi qu'aux milieux qui présentent des contrastes importants en terme de vitesse de propagation. En effet, les caractéristiques que nous venons d'énumérer sont difficiles à prendre en compte par des méthodes qui reposent sur une discrétisation régulière comme c'est, par exemple, généralement le cas des méthodes par différences finies.

Une des particularités de notre approche GD est l'utilisation des ordres faibles en temps et en espace. Pour l'approximation spatiale, nous employons des éléments tétraédriques avec des approximations constantes, linéaires ou quadratiques des champs d'onde (éléments de type P_0 , P_1 ou P_2). Il est à noter que les méthodes GD sont habituellement développées à des ordres élevés pour tirer profit de la convergence spectrale et réduire le coût numérique des modélisations. De plus, la majorité des formalismes, dont le nôtre, reposent sur l'approximation de paramètres physiques constants par élément. Si cette approximation est acceptable pour de nombreux problèmes physiques (par exemple, pour des modèles décrits par un ensemble de domaines aux propriétés homogènes), elle constitue en revanche une limite pour la modélisation sismique à cause du caractère fortement hétérogène des milieux géologiques. Par conséquent, dans le cadre de l'approximation de paramètres physiques constants par élément, il est nécessaire de recourir à une discrétisation assez fine pour représenter fidèlement les propriétés du milieu.

De ce fait, la taille minimale des éléments qu'il convient d'utiliser induit une limitation sur les ordres d'approximation en temps et en espace. C'est la raison pour laquelle nous avons privilégié l'utilisation des ordres faibles et nous sommes parvenus à estimer que, pour nos applications, l'approximation optimale était de type P_2 .

Une seconde spécificité de notre approche GD est l'utilisation intensive de la *hp*-adaptivité qui permet une adaptation en espace (h) et en ordre (p). Nous avons d'abord défini un procédé itératif pour la construction du maillage qui vise à obtenir un maillage adapté en espace en fonction des propriétés du milieu. Ce procédé opère une division des éléments tétraédriques surdimensionnés à chaque itération de la construction du maillage. On peut, de cette manière, construire des maillages adaptatifs pour des milieux arbitraires sans avoir recours à des interventions manuelles qui peuvent s'avérer fastidieuses pour les modèles complexes. Néanmoins, la construction des maillages tétraédriques contraints peut entraîner la création d'éléments malformés (de très petite dimension ou de forme très aplatie) qui conduisent à un pas de temps très petit (notre méthode utilise un pas de temps commun à l'ensemble des éléments). Nous pouvons alors réduire fortement l'impact des éléments problématiques en diminuant l'ordre d'approximation associé à ces derniers, afin de pouvoir augmenter le pas de temps global. Nous avons montré, par une étude de convergence, que la dégradation de l'ordre des plus petits éléments n'altérerait pas de manière significative la précision des résultats. Nous avons également proposé de tirer bénéfice de l'adaptation en ordre dans les couches absorbantes où le niveau de précision peut être réduit. En combinant, l'adaptation en ordre dans le cas des éléments problématiques et dans le cas des couches absorbantes, nous avons obtenu un gain en temps de calcul d'environ un ordre de grandeur par rapport aux modélisations effectuées avec un ordre unique.

En ce qui concerne les conditions absorbantes, nous avons adapté pour notre approche GD la formulation CPML, proposée par Komatitsch & Martin (2007) dans le cadre des méthodes DF, qui est une généralisation de la condition d'absorption PML standard (Berenger, 1994). La CPML repose sur l'introduction de variables mémoires et ne nécessite pas la modification du système élasto-dynamique (comme c'est le cas de la formulation standard PML fondée sur une séparation des composantes du champs d'onde en sous-composantes). Des tests nous ont permis d'évaluer l'efficacité d'absorption de la condition CPML et en particulier, la capacité à absorber les ondes sismiques qui atteignent les couches absorbantes avec des angles rasants. En revanche, nous avons constaté des phénomènes d'instabilité numérique dans certains cas. De manière pragmatique, nous avons eu recours à la stratégie proposée par Meza-Fajardo & Papageorgiou

(2008), qui consiste à modifier la formulation PML de manière à introduire une atténuation supplémentaire dans les directions parallèles aux couches absorbantes. De ce fait, la formulation obtenue ne vérifie plus les propriétés des couches PML (coefficient de réflexion nul quelque soit la fréquence et l'angle d'incidence) et introduit des réflexions parasites. Néanmoins, nous avons conclu que l'efficacité de l'absorption était faiblement dégradée tout en permettant de retarder significativement l'apparition des instabilités rencontrées dans la formulation CPML.

Les applications potentielles de la méthode GD au domaine des Sciences de la Terre sont nombreuses. Dans ce mémoire, nous avons présenté des applications pour l'étude des effets de site. Dans le cadre du projet E-2VP, nous avons pu confronter notre méthode par rapport à un panel de méthodes numériques qui couvre l'ensemble des méthodes habituellement utilisées en modélisation sismique. Les résultats que nous avons obtenus ont confirmé la pertinence des choix que nous avons adoptés (utilisation des ordres faibles, raffinement itératif du maillage tétraédrique, adaptation de l'ordre en espace et condition CPML) dans le cas d'un bassin sédimentaire qui présente des structures géologiques fines à la géométrie complexe et des contrastes importants des paramètres physiques. Nous avons également appliqué la méthode au modèle de Rustrel (Vaucluse) qui montre l'intérêt de l'approche pour l'étude des effets de site topographique. Enfin, des modélisations dans le modèle du volcan de la Soufrière (Guadeloupe) ont permis d'illustrer le potentiel de l'approche pour la compréhension de données sismiques afin de contraindre des modèles géologiques.

Perspectives pour le problème direct

Comme nous l'avons indiqué plus haut, notre approche a été développée avec des ordres faibles en temps et en espace qui fournissent le meilleur compromis entre précision et temps de calcul lorsque l'approximation des paramètres constants par élément est utilisée. Pour pouvoir bénéficier des ordres plus élevés, en terme de précision et de temps de calcul, une perspective intéressante serait de développer une approche GD avec des paramètres physiques variables au sein des éléments (Smith *et al.*, 2010). Dans cette optique, nous pensons que la formulation conservative, qui consiste en un simple changement de variable dans le but de déplacer les paramètres physiques du côté des dérivées temporelles, facilite grandement ce développement. Dans le cadre de cette formulation, la prise en compte de propriétés variables dans les éléments se traduit seulement par une modification des matrices de masses (différentes pour chaque élément) mais ne modifie

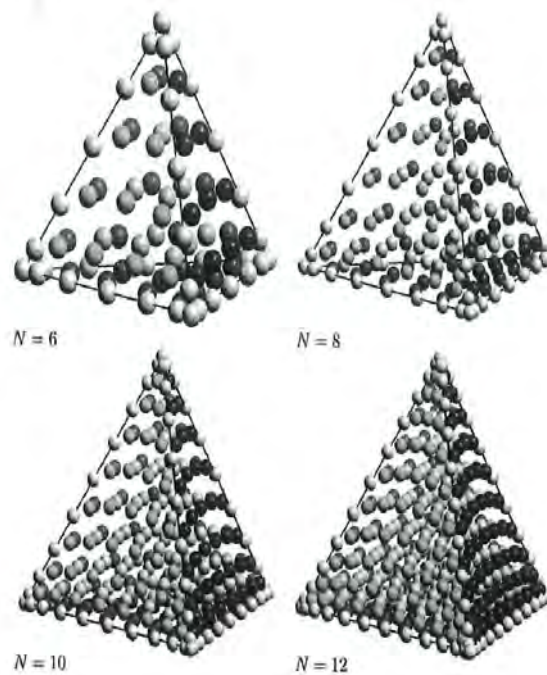


FIG. 5.19 – Famille des noeuds optimaux développés par Hesthaven & Teng (2000) offrant une convergence spectrale dans les tétraèdres. Le degré des bases polynômiales associées est indiqué à côté de chaque tétraèdre, d’après Hesthaven & Warburton (2008).

pas et donc n’alourdit pas le calcul des flux comme c’est le cas d’un développement avec le système élasto-dynamique standard (Castro *et al.*, 2010).

La possibilité d’attribuer des propriétés physiques variables dans les éléments autoriserait l’usage d’ordres plus élevés en temps et en espace dans le but d’accroître la précision tout en réduisant le coût numérique de la méthode GD. En ce qui concerne l’approximation spatiale, afin d’assurer une convergence spectrale, il est nécessaire de recourir à une autre famille de points que les points équadistants pour l’estimation des composantes de vitesse et de contrainte (dans le cas d’une approche fondée sur des bases nodales). La définition des points optimaux dans les tétraèdres est une question actuellement ouverte. On mentionnera la famille des points proposée par Hesthaven & Teng (2000) dont quelques exemples sont illustrés sur la figure 5.19 pour différents ordres polynômiaux. A l’instar des points de Gauss-Lobatto-Legendre définis dans les hexaèdres, l’espacement entre les points est réduit à mesure que l’on se rapproche des extrémités des tétraèdres. Il est à souligner que pour les ordres que nous avons considérés dans ce travail, les points équadistants et les points optimaux sont confondus (ils diffèrent à partir du degré d’approximation P_3). Conjointement aux ordres élevés en espace, on peut souhaiter

adopter des ordres élevés en temps. On peut alors employer des schémas d'intégration temporelle de type Runge-Kutta (Ern *et al.*, 2008), des schéma saute-mouton (Fahs & Lanteri, 2008) ou encore le schéma ADER (Dumbser & Käser, 2006). On note également la possibilité d'associer un pas de temps optimal pour chaque élément (Piperno, 2008; Dumbser *et al.*, 2007b).

Une réflexion doit également être menée sur la construction des maillages. Si dans ce travail, nous avons montré l'intérêt des maillages tétraédriques dans le cas de modèles géologiques complexes, on peut s'interroger sur l'utilisation exclusive de tétraèdres qui engendre un nombre important de noeuds et d'éléments. Il semble alors judicieux de pouvoir combiner des tétraèdres, préférentiellement dans les zones nécessitant une discrétisation spécifique (comme les zones à proximité d'une topographie) et des hexaèdres dans le reste du modèle. L'intérêt du maillage hybride est de réduire le nombre des éléments, des noeuds et donc le coût numérique des modélisations (Hermann *et al.*, 2010). On peut souhaiter également faciliter la construction des maillages en adoptant une approche non conforme (Fahs, 2007) qui permet entre autre de juxtaposer des éléments de nature différente ou bien une approche fondée sur une homogénéisation des paramètres (Capdeville & Guillot, 2009) qui permet de relâcher la contrainte sur la discrétisation en présence d'interfaces. On peut remarquer que l'ensemble de ces techniques (maillage hybride, maillage non-conforme et homogénéisation) ont été développées majoritairement en 2D et restent à généraliser dans le cas 3D.

Outre les aspects numériques évoqués plus haut, on peut souhaiter étendre la méthode que nous avons développée à des rhéologies plus complexes afin de prendre en compte : l'anisotropie (de la Puente *et al.*, 2007), la poro-élasticité (de la Puente *et al.*, 2008; Dupuy *et al.*, 2008; Morency & Tromp, 2008; Carcione *et al.*, 2010) ou encore l'atténuation (Käser *et al.*, 2007; Tago *et al.*, 2010). L'anisotropie et la poro-élasticité se traduisent par l'intégration de nouvelles équations de propagation dans le schéma GD. Quant à l'atténuation, elle peut être prise en compte par un ensemble de variables mémoires semblables à celles que nous avons employées pour les CPML. Hormis les problèmes de propagation, nous avons l'intention d'appliquer la méthode à l'étude de la rupture sismique (BenJemaa *et al.*, 2009; de la Puente *et al.*, 2009; Tago *et al.*, 2010) où la méthode GD paraît particulièrement pertinente pour traiter les conditions mécaniques sur la faille.

A terme, les extensions que nous venons d'énumérer permettraient des usages variés de la méthode GD à des échelles allant de la taille des réservoirs d'hydrocarbure (Käser *et al.*, 2010) à la sismologie globale (Wenk *et al.*, 2010). En effet, la méthode GD, grâce

à sa nature locale, permet une utilisation optimale des plateformes de calcul parallèle comme démontré par Wilcox *et al.* (2010) dans le cadre de modélisations à l'échelle globale avec plus de 200 000 processeurs. Enfin, pour conclure sur les perspectives, on peut mentionner l'émergence des plateformes de calcul qui utilisent des cartes graphiques (GPU : *Graphical Processing Unit*) au lieu des processeurs standards et qui permettent d'accélérer les temps de calcul de un à deux ordres de grandeur (Komatitsch *et al.*, 2010). Pour migrer vers ce type de plateformes, il convient de modifier notre code de calcul GD en introduisant des instructions spécifiques au GPU (en utilisant par exemple le langage Cuda, Kirk & Hwu (2010)).

Conclusions sur le problème inverse

Nous avons présenté un développement de l'inversion des formes d'onde (FWI) dans le cas des milieux à 3 dimensions dans le but de reconstruire les paramètres élastiques (vitesses des ondes P et S) ainsi que la densité. La méthode proposée repose sur le formalisme de l'état adjoint qui permet un calcul aisé du gradient de la fonction coût à minimiser. Un nouveau modèle est alors recherché dans direction opposée au gradient à chaque itération de l'inversion et le modèle mis à jour devient le modèle de départ pour l'itération suivante. Le gradient est obtenu par corrélation du champ incident (issu de la source sismique) et du champ résidu rétro-propagé (émis à partir de la position des récepteurs). Une spécificité de notre approche est la possibilité de choisir la méthode de modélisation pour le calcul des champs sismiques en fonction des milieux étudiés. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode GD ainsi qu'une méthode par différences finies pour résoudre le problème direct. Cette approche originale a été développée dans le but d'obtenir un outil flexible en ce qui concerne les applications.

Nous avons fait le choix d'une inversion dans le domaine fréquentiel. A cela, deux raisons principales : la première, concerne la réduction efficace du volume de données et la seconde, le bénéfice d'un algorithme multi-échelles. La réduction des données repose sur le contrôle redondant des fréquences et des angles d'ouverture sur l'échantillonnage des nombres d'onde du modèle (tout spécialement dans le cas des dispositifs grand-angles) qui permet d'exploiter un nombre réduit de fréquences discrètes (par opposition à l'ensemble des échantillons temporels impliqués dans une inversion en domaine temporel). Quant à la stratégie multi-échelles, elle s'obtient par inversions successives de fréquences croissantes afin de s'affranchir partiellement du caractère non-linéaire de l'inversion (dans le but d'éviter les minimums locaux de la fonction coût). En ce qui concerne la résolution

du problème direct, nous employons les méthodes numériques énoncées plus haut dans le domaine temporel. En effet, des études préliminaires ont montré que la résolution du système élasto-dynamique dans le domaine fréquentiel représentait un problème de taille considérable qui ne pouvait être appréhendé à l'aide de méthodes directes fondées sur une décomposition LU de la matrice d'impédance. Pour extraire les champs d'onde fréquentiels qui interviennent dans la construction du gradient, nous utilisons une transformée de Fourier discrète (TFD) qui permet de calculer les solutions fréquentielles à partir des solutions temporelles. Ce procédé, proposé initialement par Sirgue *et al.* (2008), est particulièrement intéressant car l'extraction des solutions fréquentielles n'alourdit pratiquement pas le coût de calcul des méthodes explicites et de plus, il est possible d'extraire simultanément plusieurs fréquences. En outre, cette approche fondée sur un schéma explicite permet de réaliser des fenêtrages temporels afin de sélectionner des événements particuliers (première arrivée, réflexions, ondes converties).

Afin d'interfacer différentes méthodes de modélisation des champs d'onde dans le processus d'inversion, nous avons proposé de découpler la discrétisation du problème direct et la discrétisation du problème inverse. Ce découplage, ou ce principe d'abstraction comme nous l'avons appelé dans ce mémoire, repose sur des opérations de projection lors de la construction du gradient et lors de la mise à jour du modèle. Dans un premier temps, les champs incident et rétro-propagé sont calculés par la méthode numérique choisie. Les solutions fréquentielles (obtenues par TFD) sont alors projetées en chaque point de la discrétisation du problème inverse. Après cette première projection, le gradient du paramètre inversé est calculé et le nouveau modèle est recherché dans la direction opposée au gradient. Une fois le nouveau modèle déterminé, une seconde étape de projection consiste à projeter les paramètres du nouveau modèle de la discrétisation du problème inverse vers celle du problème direct.

Nous avons proposé d'exprimer les gradients en adoptant une formulation pseudo-conservative du système élasto-dynamique. Par le biais de cette formulation, nous obtenons une expression du gradient où le diagramme de rayonnement est une matrice locale et purement diagonale quel que soit le paramètre inversé. Par conséquent, l'évaluation du gradient en un point du milieu fait intervenir uniquement les valeurs des champs sismiques en ce point. Cette propriété autorise une discrétisation arbitraire de l'inversion sous forme d'un ensemble de points que l'on peut, par exemple, densifier dans certaines zones du milieu. Bien que nous n'ayons pas encore implémenté cette approche, elle permettrait théoriquement une discrétisation optimale de l'inversion à la limite de résolution de la FWI (4 points par longueur d'onde minimale). Un autre bénéfice de cette approche

est la possibilité de définir des zones cibles au sein du milieu à imager (approche dite *target oriented*).

Des exemples simples d'application ont été présentés dans le but d'illustrer les concepts que nous venons d'évoquer. Tout d'abord, nous avons montré des gradients calculés par la méthode DF dans des milieux acoustiques et élastiques où nous avons étudié l'influence du dispositif d'acquisition. Ensuite, nous nous sommes intéressés à un modèle acoustique sphérique pour lequel la méthode GD est particulièrement adaptée. A l'aide de ce dernier cas, nous avons voulu suggérer des applications potentielles de la FWI en sismologie : la caractérisation de la source sismique et l'imagerie de la Terre globale.

Perspective pour le problème inverse

Il est à souligner que le travail que nous avons présenté sur l'inversion des formes d'onde a permis la réalisation d'un outil que nous n'avons pas eu le temps de finaliser ni de tester sur des données réelles. Un travail complémentaire doit être entrepris pour tirer tous les bénéfices de l'approche que nous avons proposée. En l'occurrence, l'algorithme complet doit être validé avec un nombre d'itérations suffisant afin de s'assurer de la convergence de la méthode. Une attention particulière doit être portée sur le découplage des problèmes direct et inverse afin d'appréhender l'influence sur la construction du gradient (et donc sur la convergence de l'inversion) par rapport à une approche standard fondée sur une discrétisation identique pour les problèmes direct et inverse.

En ce qui concerne les extensions possibles de notre approche, nous évoquerons l'inversion des paramètres liés à l'atténuation (Hicks & Pratt, 2001; Shi *et al.*, 2007; Askan *et al.*, 2007; Pratt *et al.*, 2005; Malinowsky *et al.*, 2007; Kamei & Pratt, 2008) ou encore à l'anisotropie (Barnes *et al.*, 2008; Lee *et al.*, 2008; Pratt *et al.*, 2008). Dans le cadre d'une inversion multi-paramètres, il semble par ailleurs judicieux de s'appuyer sur une méthode d'optimisation quasi-Newton de type L-BFGS qui se montre performante pour l'inversion des paramètres élastiques comme démontré par Brossier (2010).

Une perspective permettant de réduire le temps de calcul (problème crucial de la FWI à 3D) est l'utilisation de techniques d'encodage aléatoire ou déterministe et d'assemblage des sources sismiques pour réduire le nombre de simulations à chaque itération du processus d'inversion (Capdeville *et al.*, 2005; Krebs *et al.*, 2009; Ben Hadj Ali *et al.*, 2009; Herrmann *et al.*, 2009; Gao *et al.*, 2010).

La méthode que nous avons proposée peut être appliquée à des contextes variés. Nous

mentionnerons les applications en prospection pétrolière où l'inversion des paramètres élastiques est actuellement explorée à 3D (Guasch *et al.*, 2010). Dans ce cadre applicatif, nous souhaitons appliquer notre méthode aux données multi-composantes de fond de mer enregistrées sur le champ pétrolifère de Valhall en Mer du Nord (figures 3.b et 4.7) où des résultats remarquables ont été obtenus avec l'approximation acoustique (Sirgue *et al.*, 2009). Une inversion élastique revêt un intérêt crucial pour l'industrie pétrolière car elle fournit des informations relatives à la circulation des fluides (en particulier le rapport V_P/V_S) dans les réservoirs d'hydrocarbure. Ce type d'information est également utile pour la discrimination de structures géologiques (notamment entre les sables et les argiles). Dans ce contexte, l'industrie pétrolière a développé des dispositifs avec des récepteurs localisés dans des puits verticaux et des sources en surface (dispositif de type VSP (*vertical seismic profile*) 3D *walk-away*). On peut aussi mentionner des applications géotechniques pour la proche surface terrestre comme la détection de cavités ou la caractérisation de zones sujettes à des glissements de terrain (Romdhane *et al.*, 2010). Afin de tirer profit de la FWI, il est nécessaire de disposer d'un réseau de capteurs (ou de sources, en vertu du principe de réciprocité) dense et spatialement étendu. Ces critères ne sont généralement pas rencontrés en sismologie où la répartition des stations est irrégulière et les sources habituellement concentrées dans des zones sismogènes telles les zones de subduction. On peut alors souligner l'importance du projet *USArray* qui consiste à déployer un réseau dense de stations sismologiques sur le continent américain (figure 5.20). Les résultats obtenus par FWI à partir des données acquises par ce réseau permettraient d'obtenir un modèle géologique continental avec une résolution sans précédent.

Pour conclure, nous évoquerons l'exploitation des modèles reconstruits par FWI. En effet, la visualisation des données à 3D est un procédé qui mérite une attention particulière. Dans ce mémoire, nous avons intensivement employé des vues en coupe dans des plans privilégiés et connus afin de mettre en évidence certaines caractéristiques. Ce procédé ne peut pas se généraliser pour une exploitation optimale de modèles géologiques arbitraires. On peut alors mentionner les possibilités offertes dans le contexte de la réalité virtuelle qui permettront à terme à un utilisateur de s'immerger dans un modèle, d'interagir en temps réel avec ce dernier et de percevoir les structures réellement en 3D. Ces techniques sont par ailleurs utilisées dans l'industrie pétrolière via des murs d'image où différents corps de métier allant des géophysiciens aux géologues peuvent être rassemblés à des fins d'interprétation. On peut alors imaginer appliquer la réalité virtuelle à l'exploitation de modèles sismologiques globaux et effectuer, comme l'avait imaginé Jules Verne, mais de manière virtuelle, un voyage au centre de la Terre.

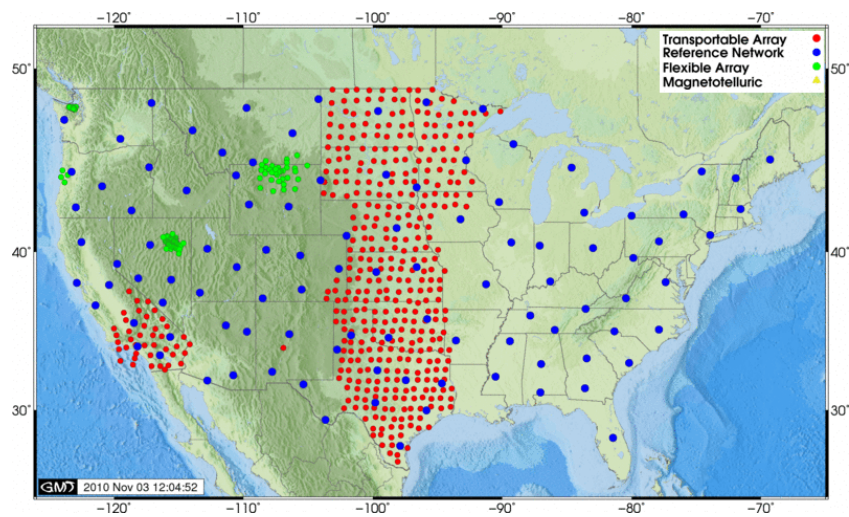


FIG. 5.20 – Dispositif mobile de stations sismologiques dans le cadre du projet *USArray*. Les stations restent environ deux années à des positions fixes avant d’être déplacées d’Est en Ouest afin de de couvrir l’ensemble du continent Nord américain. Initié en 2004, le projet se termine en 2015. Source : site internet IRIS.

Bibliographie

- Aagaard, B. T., Hall, J. F. & Heaton, T. H. (2001). Characterization of near-source ground motion with earthquake simulations. *Earthq. Spectra.*, 17:177–207.
- Abarbanel, S., Gottlieb, D. & Hesthaven, J. S. (2002). Long-time behavior of the perfectly matched layer equations in computational electromagnetics. *Journal of scientific Computing*, 17:405–422.
- Achenbach, J. D., Gantesen, A. K. & McMaken, H. (1982). *Ray Methods for Waves in Elastic Solids*. Pitman, London.
- Ainsworth, M., Monk, P. & Muniz, W. (2006). Dispersive and Dissipative Properties of Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Second-Order Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3):5–40.
- Akcelik, V., Bielak, J., Biros, G., Epanomeritakis, I., Fernandez, A., Ghattas, O., Kim, E. J., Lopez, J., O'Hallaron, D., Tu, T. & Urbanic, J. (2003). High resolution forward and inverse earthquake modeling on terascale computers. *In SC '03 : Proceedings of the 2003 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, page 52, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Alford, R. M., Kelly, K. R. & Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39:834–842.
- Alterman, Z. & Karal, F. C. (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 58:367–398.
- Amestoy, P. R., Guermouche, A., L'Excellent, J. Y. & Pralet, S. (2006). Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32:136–156.
- Aoi, S. & Fujiwara, H. (1999). 3D finite-difference method using discontinuous grids. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 89:918–930.

BIBLIOGRAPHIE

- Aoyama, Y. & Nakano, J. (1999). *RS/6000 SP : Practical MPI Programming*. IBM Corporation, Texas, Red Book édition.
- Ashcraft, C. & Liu, J. W. H. (1998). Robust ordering of sparse matrices using multisection. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(3):816–832.
- Askan, A., Akcelik, V., Bielak, J. & Ghattas, O. (2007). Full waveform inversion for seismic velocity and anelastic losses in heterogeneous structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97(6):1990–2008.
- Askan, A. & Bielak, J. (2008). Full anelastic waveform tomography including model uncertainty. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(6):2975–2989.
- Babuska, I. & Suri, M. (1990). The p and the hp versions of the finite element method : An overview. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 80(1-3):5–26.
- Barnes, C. & Charara, M. (2009). The domain of applicability of acoustic full-waveform inversion for marine seismic data. *Geophysics*, 74(6):WCC91–WCC103.
- Barnes, C., Charara, M. & Tsuchiya, T. (2008). Feasibility study for an anisotropic full waveform inversion of cross-well data. *Geophysical Prospecting*, 56:897–906.
- Basabe, J. D., Sen, M. & Wheeler, M. (2008). The interior penalty discontinuous galerkin method for elastic wave propagation : grid dispersion. *Geophysical Journal International*, 175:83–93.
- Batoz, J. L. & Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis - Volume I*. Hermes Science Publications.
- Bécache, E., Petropoulos, P. G. & Gedney, S. G. (2004). On the long-time behavior of unsplit perfectly matched layers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52:1335–1342.
- Bednar, J. B., Shin, C. & Pyun, S. (2007). Comparison of waveform inversion, part 2 : phase approach. *Geophysical Prospecting*, 55(4):465–475.
- Ben Hadj Ali, H., Operto, S. & Virieux, J. (2008). Velocity model building by 3D frequency-domain, full-waveform inversion of wide-aperture seismic data. *Geophysics*, 73(5):VE101–VE117.

- Ben Hadj Ali, H., Operto, S. & Virieux, J. (2009). Three-dimensional frequency-domain full waveform inversion with phase encoding. *In 79th Annual SEG Conference & Exhibition, Houston*, pages 2288–2292. SEG.
- BenJemaa, M. (2007). *Etude et simulation numérique de la rupture dynamique des séismes par des méthodes d'éléments finis discontinus*. Thèse de doctorat, Université Nice-Sophia Antipolis.
- BenJemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J. (2009). 3D Dynamic rupture simulations by a finite volume method. *Geophys. J. Int.*, 178:541–560.
- BenJemaa, M., Glinsky-Olivier, N., Cruz-Atienza, V. M., Virieux, J. & Piperno, S. (2007). Dynamic non-planar crack rupture by a finite volume method. *Geophys. J. Int.*, 171: 271–285.
- Berenger, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114:185–200.
- Bernacki, M. & Piperno, S. (2003). Méthode de type galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique. Rapport de Recherche 4932, INRIA Sophia-Antipolis.
- Beydoun, W. B. & Tarantola, A. (1988). First Born and Rytov approximation : Modeling and inversion conditions in a canonical example. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83:1045–1055.
- Bleibinhaus, F., Hole, J. A., Ryberg, T. & Fuis, G. S. (2007). Structure of the California Coast Ranges and San Andreas Fault at SAFOD from seismic waveform inversion and reflection imaging . *Journal of Geophysical Research*, 112(B06315): doi :10.1029/2006JB004611.
- Bohlen, T. & Saenger, E. H. (2006). Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves. *Geophysics*, 71:109–115.
- Bolt, B. A. (1982). *Inside the Earth*. Freeman.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 71(4):959–971.

BIBLIOGRAPHIE

- Brenders, A. J. & Pratt, R. G. (2007a). Efficient waveform tomography for lithospheric imaging : implications for realistic 2D acquisition geometries and low frequency data. *Geophysical Journal International*, 168:152–170.
- Brenders, A. J. & Pratt, R. G. (2007b). Full waveform tomography for lithospheric imaging : results from a blind test in a realistic crustal model. *Geophysical Journal International*, 168:133–151.
- Briggs, A. (1992). *Acoustic microscopy*. Clarendon Press, Oxford.
- Brossier, R. (2010). Two-dimensional frequency-domain visco-elastic full-waveform inversion : parallel algorithms, optimization and performances. *Computers & Geosciences*.
- Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2009). Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion. *Geophysics*, 74(6): WCC63–WCC76.
- Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2010). Which data residual norm for robust elastic frequency-domain full waveform inversion ? *Geophysics*, 75(3):R37–R46.
- Brossier, R., Virieux, J. & Operto, S. (2007). Finite-volume method for 2D PSV elastodynamic equations in frequency domain with velocity-parsimonious formulation. *In Expanded Abstracts*, pages 2094–2098. Soc. Expl. Geophys.
- Brossier, R., Virieux, J. & Operto, S. (2008). Parsimonious finite-volume frequency-domain method for 2-D P-SV-wave modelling. *Geophysical Journal International*, 175(2):541–559.
- Bunks, C. (1992). Optimization of paraxial wave-equation operator coefficients. *In Expanded Abstracts*. Soc. Expl. Geophys.
- Butcher, J. C. (1987). *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations : Runge-Kutta and General Linear Methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Campillo, M., Gariel, J., Aki, K. & Sanchez-Sesma, F. (1989). Destructive strong ground motion in Mexico city : source, path, and site effects during great 1985 Michoacan earthquake. *BSSA*, 79(6):1718–1735.
- Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J. & Montagner, J. (2003). Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models. *Geophysical Journal International*, 152:34–67.

- Capdeville, Y. & Guillot, L. (2009). 2D/3D Elastic model up-scaling for the wave equation based on non-periodic homogenization. *In Expanded Abstracts, 79th Annual SEG Conference & Exhibition, Houston*. Society of Exploration Geophysics.
- Capdeville, Y., Gung, Y. & Romanowicz, B. (2005). Towards global earth tomography using the spectral element method : a technique based on source stacking. *Geophys. J. Int.*, 162:541–554.
- Carcione, J., Morency, C. & Santos, J. (2010). Computational poroelasticity - a review. *Geophysics*, 75(5):229–243.
- Carrington, L., Komatitsch, D., Laurenza, M., Tikir, M. M., Michéa, D., Le Goff, N., Snavely, A. & Tromp, J. (2008). High-frequency simulations of global seismic wave propagation using specfem3d_globe. *In SC '08 : Proceedings of the 2008 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, Austin, Texas, USA. IEEE Computer Society.
- Cary, P. & Chapman, C. (1988). Automatic 1-D waveform inversion of marine seismic refraction data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 93:527–546.
- Casadei, F., Gabellini, E., Fotia, G., Maggio, F. & Quarteroni, A. (2002). A mortar spectral/finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg*, 191:5119–5148.
- Casarotti, E., Stupazzini, M., Lee, S.-J., Komatitsch, D., Piersanti, A. & Tromp, J. (2007). CUBIT and seismic wave propagation based upon the spectral-element method : An advanced unstructured mesher for complex 3D geological media. pages 579–597. Springer.
- Castro, C. E., Käser, M. & Brietzke, G. B. (2010). Seismic Waves in Heterogeneous Material : Sub-cell Resolution of the Discontinuous Galerkin Method. *Geophys. J. Int.*, 182(1):250–264.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. & Reshef, M. (1985). A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 50(4):2117–2131.
- Červený, V., Molotkov, I. A. & Pšenčík, I. (1977). *Ray Method in Seismology*. Charles University Press, Praha.
- Chaljub, E. (2010). Verification of 3D numerical predictions. *In Euroseistest Verification and Validation Project (E-2VP)*. Workshop à Cadarache, France.

- Chaljub, E., Bard, P., Tsuno, S., Kristek, J., Moczo, P., Franek, P., Hollender, F., Manakou, M., Raptakis, D. & Ptilakis, K. (2009). Assessing the capability of numerical methods to predict earthquake ground motion : the Euroseistest verification and validation project. *In EOS Trans. AGU, abstract S43A-1968*. American Geophysical Union, San Francisco, USA.
- Chaljub, E., Capdeville, Y. & Vilotte, J.-P. (2003). Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids. *Journal of Computational Physics*, 187:457–491.
- Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., Valette, B. & Festa, G. (2007). Spectral element analysis in seismology. *In Wu, R.-S. & Maupin, V., éditeurs : Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Earth*, volume 48 de *Advances in Geophysics*, pages 365–419. Elsevier - Academic Press, London.
- Chaljub, E., Moczo, P., Tsuno, S., Bard, P.-Y., Kristek, J., Käser, M., Stupazzini, M. & Kristeková, M. (2010). Quantitative Comparison of Four Numerical Predictions of 3D Ground Motion in the Grenoble Valley, France. *BSSA*, 100(4):1427–1455.
- Chalub, E., Bard, P.-Y., Hollender, F., Theodoulidis, N., Moczo, P., Tsuni, S., Kristek, J., Cadet, H., Franek, P., Bielak, J. & Ptilakis, K. (2010). Euroseistest numerical simulation project : comparison with local earthquake recordings for validation. *In Expanded Abstracts, SSA 2010 Conference, Portland*. Seismological Society of America.
- Chapman, C. (2004). *Fundamentals of seismic waves propagation*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Chapman, C. H. & Orcutt, J. A. (1985). Least-squares fitting of marine seismic refraction data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 82:339–374.
- Chavent, G. (1974). Identification of parameter distributed systems. *In Goodson, R. & Polis, M., éditeurs : Identification of function parameters in partial differential equations*, pages 31–48. American Society of Mechanical Engineers, New York.
- Chavent, G. (2009). *Nonlinear least squares for inverse problems*. Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- Chavéz-García, J., Sánchez, L. R. & Hatzfeld, D. (1996). Topographic site effects and HVSR. A comparison between observations and theory. *Bull. of the Seism. Soc. of Am.*, 86:1559–1573.

- Chen, P., Jordan, T. & Zhao, L. (2007). Full three-dimensional tomography : a comparison between the scattering-integral and adjoint-wavefield methods. *Geophysical Journal International*, 170:175–181.
- Chew, W. C. & Liu, Q. H. (1996). Perfectly matched layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition. *J. Compu. Acous.*, 4:341–359.
- Chin-Joe-Kong, M. J. S., Mulder, W. A. & Van Veldhuizen, M. (1999). Higher-order triangular and tetrahedral finite elements with mass lumping for solving the wave equation. *Journal of Engineering Mathematics*, 35:405–426.
- Chu, C. & Stoffa, P. L. (2008). A pseudospectral-finite difference hybrid approach for large-scale seismic modeling and RTM on parallel computers. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 27(1):2087–2091.
- Claerbout, J. (1971). Towards a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, 36:467–481.
- Claerbout, J. F. (1976). *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. McGraw-Hill Book Co.
- Clayton, R. & Engquist, B. (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equation. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 67:1529–1540.
- Clough, R. J. (1960). The finite element method in plane stress analysis. *In ASCE Conf Electron Computat, Pittsburg, PA*.
- Cockburn, B., Karniadakis, G. & Shu, C. W. (2000). *Discontinuous Galerkin Method : Theory, Computation and Application*. Springer - Lecture Notes in Computational Science Engineering.
- Cockburn, B., Li, F. & Shu, C. W. (2004). Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 194:588–610.
- Collier, J. S. & Singh, S. C. (1997). Detailed structure of the top of the melt body beneath the east pacific rise at 9° 40'N from waveform inversion of seismic reflection data. *Journal of Geophysical Research*, 102(B9):20,287–20,304.
- Collino, F. & Tsogka, C. (2001). Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66:294–307.

BIBLIOGRAPHIE

- Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Math Society*, 49:1–61.
- Courant, R., Friedrichs, K. & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74.
- Coutant, O. (1989). Program of Numerical Simulation AXITRA. *Research report, LGIT, Grenoble*.
- Coutant, O., Doré, F., Nicollin, F., Beauducel, F. & Virieux, J. (2010). Seismic tomography of the Soufrière de Guadeloupe upper geothermal system. *In Geophysical Research Abstracts*, volume 12. EGU.
- Crase, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J. & Tarantola, A. (1990). Robust elastic non-linear waveform inversion : application to real data. *Geophysics*, 55:527–538.
- Crase, E., Wideman, C., Noble, M. & Tarantola, A. (1992). Nonlinear elastic inversion of land seismic reflection data. *Journal of Geophysical Research*, 97:4685–4705.
- Cruz-Atienza, V. M. & Virieux, J. (2004). Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach. *Geophys. J. Int.*, 158:939–954.
- Dablain, M. A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51:54–66.
- Dahlen, F. A., Hung, S.-H. & Nolet, G. (2000). Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes - I. theory. *Geophys. J. Int.*, 141:157–174.
- Davis, L. L. & West, L. R. (1973). Observed effects of topography on ground motion. *Bull. of the Seism. Soc. of Am.*, 63(1):283–298.
- Davis, P. J. (1975). *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, New York.
- Day, S. M. & Bradley, C. R. (2001). Memory-efficient simulation of anelastic wave propagation. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 91:520–531.
- Day, S. M., Dalguer, L. A., Lapusta, N. & Liu, Y. (2005). Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture. *J. Geophys. Res.*, 110:B12307, doi :10.1029/2005JB003813.

- De Barros, L. & Dietrich, M. (2008). Perturbations of the seismic reflectivity of a fluid-saturated depth-dependent poroelastic medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(3):1409–1420.
- De Barros, L., Dietrich, M. & Valette, B. (2010). Full waveform inversion of seismic waves reflected in a stratified porous medium. *Geophysical Journal International*, 182(3):1543–1556.
- de la Puente, J., Ampuero, J.-P. & Käser, M. (2009). Dynamic Rupture Modeling on Unstructured Meshes Using a Discontinuous Galerkin Method. *J. Geophys. Res.*, 114:B10302.
- de la Puente, J., Dumbser, M., Käser, M. & Igel, H. (2008). Discontinuous Galerkin methods for wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 73(5):77–97.
- de la Puente, J., Käser, M., Dumbser, M. & Igel, H. (2007). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes IV : Anisotropy. *Geophysical Journal International*, 169(3):1210–1228.
- Delaunay, B. (1934). Sur la sphère vide. *Bul. Acad. Sci. URSS, Class. Sci. Nat.*, pages 793–800.
- Delcourte, S., Fezoui, L. & Glinsky-Olivier, N. (2009). A high-order discontinuous Galerkin method for the seismic wave propagation. *ESAIM : Proc.*, 27:70–89.
- Dessa, J. X. & Pascal, G. (2003). Combined travelttime and frequency-domain seismic waveform inversion : a case study on multi-offset ultrasonic data. *Geophys. J. Int.*, 154(1):117–133.
- Devaney, A. J. (1982). A filtered backprojection algorithm for diffraction tomography. *Ultrasonic Imaging*, 4:336–350.
- Dhatt, G., Touzot, G. & Lefrançois, E. (2004). *Méthode des éléments finis - Une présentation*. Hermes Science Publications.
- Dietrich, M. & Kormendi, F. (1990). Perturbation of the plane-wave reflectivity of a depth-dependent elastic medium by weak inhomogeneities. *Geophys. J. Int.*, 100:203–214.

- Dolean, V., Lanteri, S. & Perrusel, R. (2007). A domain decomposition method for solving the three-dimensional time-harmonic Maxwell equations discretized by discontinuous Galerkin methods. *J. Comput. Phys.*, 227(3):2044–2072.
- Dormy, E. & Tarantola, A. (1995). Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method. *Journal of Geophysical Research*, 100:2123–2133.
- Drossaert, F. H. & Giannopoulos, A. (2007). A nonsplit complex frequency-shifted PML based on recursive integration for FDTD modeling of elastic waves. *Geophysics*, 72(2): T9–T17.
- Dubiner, M. (1991). Spectral methods on triangles and other domains. *J. Sci. Comput.*, 6(4):345–390.
- Dumbser, M. & Käser, M. (2006). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes II : The Three-Dimensional Isotropic Case. *Geophysical Journal International*, 167(1):319–336.
- Dumbser, M., Käser, M. & de la Puente, J. (2007a). Arbitrary high-order finite volume schemes for seismic wave propagation on unstructured meshes in 2D and 3D. *Geophys. J. Int.*, 171:665–694.
- Dumbser, M., Käser, M. & Toro, E. (2007b). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes V : Local Time Stepping and p-Adaptivity. *Geophysical Journal International*, 171(2):695–717.
- Dunavant, D. A. (1985). High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 21:1129–1148.
- Dupuy, B., Virieux, J., De Barros, L. & Garambois, S. (2008). Propagation des ondes sismiques en milieux poreux hétérogènes à deux dimensions. Rapport technique, Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université J. Fourier, Grenoble I.
- Duvaut, G. (1990). *Mécanique des milieux continus*. Masson.
- Eberhardt, E., Stead, D. & Coggan, J. S. (2004). Numerical analysis of initiation and progressive failure in natural rock slope - the 1991 Randa rockslide. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41(1):69–87.

- Epanomeritakis, I., Akçelik, V., Ghattas, O. & Bielak, J. (2008). A Newton-CG method for large-scale three-dimensional elastic full waveform seismic inversion. *Inverse Problems*, 24:1–26.
- Erlangga, Y. A. (2005). *A robust and efficient iterative method for the numerical solution of the Helmholtz equation*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology.
- Ern, A., Piperno, S. & Djadel, K. (2008). A well-balanced Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for the Shallow-Water Equations with flooding and drying. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 58(1):1–25.
- Etgen, J. T. & O’Brien, M. J. (2007). Computational methods for large-scale 3d acoustic finite-difference modeling : a tutorial. *Geophysics*, 72:SM223–SM230.
- Etienne, V. (1997). Microscopie acoustique impulsionnelle large-bande appliquée à la caractérisation locale de matériaux anisotropes. Projet de fin d’études, INSA Lyon.
- Etienne, V. (2007). Fonction de Green et Renversement Temporel appliqués à l’imagerie à l’échelle mésoscopique d’un milieu poreux hétérogène. Mémoire de D.E.A., Université de Nice Sophia-Antipolis. Master DSGA.
- Etienne, V., Brossier, R., Operto, S. & Virieux, J. (2008). A 3D parsimonious Finite-Volume Frequency-Domain method for elastic wave modelling. *In Expanded Abstracts, 70th Annual EAGE Conference & Exhibition, Rome*. EAGE.
- Etienne, V., Chaljub, E., Virieux, J. & Glinsky, N. (2010a). An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3D elastic wave modelling. *Geophysical Journal International*, 183(2):941–962.
- Etienne, V., Chaljub, E., Virieux, J. & Operto, S. (2010b). Accurate prediction of ground motion using an hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method. *In abstract 10-307*. Seismological Society of America, Portland, USA.
- Etienne, V., Virieux, J., Glinsky, N. & Operto, S. (2009a). Seismic modelling with discontinuous galerkin finite-element method - application to large scale 3D elastic media. *In Expanded Abstracts, 71th Annual EAGE Conference & Exhibition, Amsterdam*. EAGE.
- Etienne, V., Virieux, J., Hui, G., Jia, Y. & Operto, S. (2010c). Computational and methodological developments towards 3D full waveform inversion. *In EOS Trans. AGU, abstract S31A-2049*. American Geophysical Union, San Francisco, USA.

BIBLIOGRAPHIE

- Etienne, V., Virieux, J. & Operto, S. (2009b). A massively parallel time domain discontinuous Galerkin method for 3D elastic wave modeling. *In Expanded Abstracts, 79th Annual SEG Conference & Exhibition, Houston*. Society of Exploration Geophysics.
- Etienne, V., Virieux, J. & Operto, S. (2010d). Seismic modelling with the discontinuous Galerkin finite-element method : application to complex 3D elastic media. *In Expanded Abstracts, 72th Annual EAGE Conference & Exhibition, Barcelona*. EAGE.
- Etienne, V., Virieux, J., Operto, S. & Jia, Y. (2010e). Computational issues and strategies related to full waveform inversion in 3D elastic media : Methodological developments. *In Expanded Abstracts, 80th Annual SEG Conference & Exhibition, Denver*. Society of Exploration Geophysics.
- Faccioli, E. F., Paolucci, R. & Quarteroni, A. (1997). 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method. *J. Seismol.*, 1:237–251.
- Fahs, H. (2007). Numerical evaluation of a non-conforming discontinuous Galerkin method on triangular meshes for solving the time-domain Maxwell equations on non-conforming meshes. Rapport de Recherche 6311, INRIA Sophia-Antipolis.
- Fahs, H. & Lanteri, S. (2008). Convergence and stability of a high-order leap-frog based discontinuous Galerkin method for the Maxwell equations on non-conforming meshes. Rapport de Recherche 6699, INRIA Sophia-Antipolis.
- Fichtner, A. (2010). *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Springer, New York.
- Fichtner, A., Bunge, H. P. & Igel, H. (2006a). The adjoint method in seismology : I - Theory. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 157(1-2):86–104.
- Fichtner, A., Bunge, H. P. & Igel, H. (2006b). The adjoint method in seismology : II - Applications. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 157(1-2):105–123.
- Fichtner, A., Kennett, B. L. N., Igel, H. & Bunge, H. P. (2008). Theoretical background for continental- and global-scale full-waveform inversion in the time-frequency domain. *Geophysical Journal International*, 175:665–685.
- Fichtner, A., Kennett, B. L. N., Igel, H. & Bunge, H. P. (2009). Full waveform tomography for upper-mantle structure in the Australasian region using adjoint methods. *Geophys. J. Int.*, 179(3):1703–1725.

- Fichtner, A., Kennett, B. L. N., Igel, H. & Bunge, H. P. (2010). Full waveform tomography for radially anisotropic structure : New insights into present and past states of the Australasian upper mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, 290(3-4):270–280.
- Fink, M. (1993). Time-reversal mirrors. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 26(9): 1333–1350.
- Forgues, E. & Lambaré, G. (1997). Parameterization study for acoustic and elastic ray+born inversion. *Journal of Seismic Exploration*, 6:253–278.
- Fornberg, B. (1996). *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics (No. 1).
- Frey, P. & George, P. (2008). *Mesh Generation*. ISTE Ltd & John Wiley Sons Inc, London (UK) & Hoboken (USA).
- Frey, P. J. (2001). MEDIT, An interactive mesh visualization software. Rapport de Recherche 0253, INRIA Rocquencourt.
- Galerkin, B. G. (1915). Rods and plates. series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates. *Engineers Bulletin (Vestnik Inzhenerov)*, 19:897–908.
- Galis, M., Moczo, P. & Kristek, J. (2008). A 3-D hybrid finite-difference - finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion. *Geophysical Journal International*, 175:153–184.
- Gander, M. J. (2009). From Ritz-Galerkin into Modern Computing. *In Pour le centenaire de la mort du physicien valaisan Walther Ritz, Sion, Suisse*.
- Gao, F., Atle, A. & Williamson, P. (2010). Full waveform inversion using deterministic source encoding. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 29(1):1013–1017.
- Gao, F., Levander, A. R., Pratt, R. G., Zelt, C. A. & Fradelizio, G. L. (2006a). Waveform tomography at a groundwater contamination site : surface reflection data. *Geophysics*, 72(5):G45–G55.
- Gao, F., Levander, A. R., Pratt, R. G., Zelt, C. A. & Fradelizio, G. L. (2006b). Waveform tomography at a groundwater contamination site : Vsp-surface data set. *Geophysics*, 71(1):H1–H11.

BIBLIOGRAPHIE

- Garvin, W. W. (1956). Exact transient solution of the buried line source problem. *Proc. Roy. Soc. London*, 234:528–541.
- Gauss, C. F. (1815). *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*. Heinrich Dietrich, Göttingen.
- Gauthier, O., Virieux, J. & Tarantola, A. (1986). Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms : numerical results. *Geophysics*, 51(7):1387–1403.
- Geli, L., Bard, P. Y. & Julien, B. (1988). The effect of topography on earthquake ground motion : a review and new results. *Bull. of the Seism. Soc. of Am.*, 78:42–63.
- Gelis, C., Virieux, J. & Grandjean, G. (2007). 2D elastic waveform inversion using Born and Rytov approximations in the frequency domain. *Geophysical Journal International*, 168:605–633.
- Gelius, L. J., Johansen, I., Sponheim, N. & Stamnes, J. J. (1991). A generalized diffraction tomography algorithm. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89:523–528.
- Geuzaine, C. & Remacle, J. F. (2009). *GMSH - Reference Manual - Version 2.3*. Université de Liège.
- Gottschamer, E. & Olsen, K. B. (2001). Accuracy of the explicit planar free-surface boundary condition implemented in a fourth-order staggered-grid velocity-stress finite-difference scheme. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 91:617–623.
- Grandjean, G., Leparoux, D., Bitri, A. & Baltassat, J. (2000). Imagerie SASW du sous-sol urbain en présence de cavités souterraines superficielles. Rapport de Recherche 50209, BRGM.
- Graves, R. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 86:1091–1106.
- Guasch, L., Warner, M. R., , Stekl, I. & Umpleby, A. P. (2010). 3D Elastic Wavefield Inversion in the Time Domain. *In Expanded Abstracts, 72th Annual EAGE Conference & Exhibition, Barcelona*. EAGE.
- Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52.

- Hayashi, K., Burns, D. & Toks'oz, M. (2001). Discontinuous-grid finite-difference seismic modelling including surface topography. *Bulletin of Seismological Society of America*, 91(6):1750–1764.
- Hermann, V., Käser, M. & Castro, E. C. (2010). Non-conforming hybrid meshes for efficient 2D wave propagation using the Discontinuous Galerkin method. *Geophys. J. Int.* in press.
- Herrmann, F. J., Erlangga, Y. A. & Lin, T. T. Y. (2009). Compressive simultaneous full-waveform simulation. *Geophysics*, 74(4):A35–A40.
- Hesthaven, J. & Teng, C. H. (2000). Stable spectral methods on tetrahedral elements. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21:2352–2380.
- Hesthaven, J. S. & Warburton, T. (2008). *Nodal Discontinuous Galerkin Method. Algorithms, Analysis, and Application*. Springer, New York.
- Hestholm, S. (1999). 3-D finite-difference viscoelastic wave modeling including surface topography. *Geophysical Journal International*, pages 852–878.
- Hicks, G. J. (2002). Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using kaiser windowed sinc functions. *Geophysics*, 67:156–166.
- Hicks, G. J. & Pratt, R. G. (2001). Reflection waveform inversion using local descent methods : estimating attenuation and velocity over a gas-sand deposit. *Geophysics*, 66(2):598–612.
- Holberg, O. (1988). Towards optimum one-way wave propagation. *Geophys. Prosp.*, 36:99–114.
- Hughes, T. J. R. (2003). *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications Inc.
- Ichimura, T., Hori, M. & Bielak, J. (2009). A hybrid multiresolution meshing technique for finite element three-dimensional earthquake ground motion modelling in basins including topography. *Geophys. J. Int.*, 177:1121–1232.
- Ichimura, T., Hori, M. & Kuwamoto, H. (2007). Earthquake motion simulation with multi-scale finite element analysis on hybrid grid. *Bull. seism. Soc. Am.*, 97(4):1133–1143.

BIBLIOGRAPHIE

- Igel, H., Mora, P. & Riollet, B. (1995). Anisotropic wave propagation through finite-difference grids. 60:1203–1216.
- Jacobs, G. & Hesthaven, J. S. (2006). High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell methods on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 214:96–121.
- Jaiswal, P., Zelt, C., Bally, A. W. & Dasgupta, R. (2008). 2-D traveltime and waveform inversion for improved seismic imaging : Naga Thrust and Fold Belt, India. *Geophysical Journal International*, doi :10.1111/j.1365-246X.2007.03691.x.
- Jaiswal, P., Zelt, C., Dasgupta, R. & Nath, K. (2009). Seismic imaging of the Naga Thrust using multiscale waveform inversion. *Geophysics*, 74(6):WCC129–WCC140.
- Jannane, M., Beydoun, W., Crase, E., Cao, D., Koren, Z., Landa, E., Mendes, M., Pica, A., Noble, M., Roeth, G., Singh, S., Snieder, R., Tarantola, A. & Trezeguet, D. (1989). Wavelengths of Earth structures that can be resolved from seismic reflection data. *Geophysics*, 54(7):906–910.
- Jongmans, D., Pitilakis, K., Demanet, D., Raptakis, D., Riepl, J., Horrent, C., Lontzietidis, K. & Bard, P. Y. (1998). Determination of the geological structure of the Volvi basin and validation of the basin response. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2):473–487.
- Kamei, R. & Pratt, R. G. (2008). Waveform tomography strategies for imaging attenuation structure for cross-hole data. *In Extended Abstracts, Roma*, page F019.
- Kang, T. S. & Baag, C. E. (2004). Finite-difference seismic simulation combining discontinuous grids with locally variable timesteps. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94:207–219.
- Karypis, G. & Kumar, V. (1998). *METIS - A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes and computing fill-reducing orderings of sparse matrices - Version 4.0*. University of Minnesota.
- Käser, M., de la Puente, J., Castro, C., Herrmann, V. & Dumbser, M. (2008a). Seismic Wave Field Modelling Using High Performance Computing. *In Expanded Abstracts, 78th Annual SEG Conference & Exhibition, Las Vegas*. Society of Exploration Geophysics.
- Käser, M., Djikpesse, H. & Prange, M. (2010). Numerical Modeling of Borehole-guided Waves and Reservoir Formation Reflections. *In Expanded Abstracts, 80th Annual SEG Conference & Exhibition, Denver*. Society of Exploration Geophysics.

- Käser, M. & Dumbser, M. (2006). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes I : The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. *Geophysical Journal International*, 166:855–877.
- Käser, M. & Dumbser, M. (2008). A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids. *Geophysics*, 73(3):23–35.
- Käser, M., Dumbser, M., de la Puente, J. & Igel, H. (2007). An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes III : Viscoelastic Attenuation. *Geophysical Journal International*, 168(1):224–242.
- Käser, M., Hermann, V. & de la Puente, J. (2008b). Quantitative accuracy analysis of the discontinuous Galerkin method for seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 173(2):990–999.
- Kawase, H. (2003). *Site effects on strong ground motions*, *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology, Part B*. W.H.K. Lee and H. Kanamori (eds), Academic Press, London.
- Keast, P. (1986). Moderate-degree tetrahedral quadrature formulae. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55:339–348.
- Kirk, D. B. & Hwu, W. W. (2010). *Programming Massively Parallel Processors*. Morgan Kaufmann Publishers, Burlington, USA.
- Kolb, P., Collino, F. & Lailly, P. (1986). Prestack inversion of 1-D medium,. *In Extended Abstracts*, volume 74, pages 498–508.
- Komatitsch, D., Barnes, C. & Tromp, J. (2000). Wave propagation near a fluid-solid interface : a spectral element approach. *Geophysics*, 65(2):623–631.
- Komatitsch, D., Erlebacher, G., Göldeke, D. & Michéa, D. (2010). High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster. 229(20): 7692–7714.
- Komatitsch, D., Labarta, J. & Michéa, D. (2008). A simulation of seismic wave propagation at high resolution in the inner core of the Earth on 2166 processors of Mare-Nostrum. *Lecture Notes in Computer Science*, 5336:364–377.

BIBLIOGRAPHIE

- Komatitsch, D., Liu, Q., Tromp, J., Suss, P., Stidham, C. & Shaw, J. H. (2004). Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94:187–206.
- Komatitsch, D. & Martin, R. (2007). An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, 72(5):SM155–SM167.
- Komatitsch, D. & Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral element method for 3D seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.*, 139:806–822.
- Komatitsch, D. & Vilotte, J. P. (1998). The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 88:368–392.
- Kormendi, F. & Dietrich, M. (1991). Non linear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media. *Geophysics*, 56(5):664–674.
- Kosloff, D., Kessler, D., Filho, A., Tessmer, E., Behle, A. & Strahilevitz, R. (1990). Solution of the equations of dynamic elasticity by a chebychev spectral method. *Geophysics*, 55:464–473.
- Krebs, J., Anderson, J., Hinkley, D., Neelamani, R., Lee, S., Baumstein, A. & Lacasse, M. D. (2009). Fast full-wavefield seismic inversion using encoded sources. *Geophysics*, 74(6):WCC105–WCC116.
- Kristeková, M., Kristek, J., Moczo, P. & Day, S. (2006). Misfit Criteria for Quantitative Comparison of Seismograms. *Bull. seism. Soc. Am.*, 96:1836–1850.
- Kuzuoglu, M. & Mitra, R. (1996). Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 6:447–449.
- Lailly, P. (1983). The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. In Bednar, R. & Weglein, éditeurs : *Conference on Inverse Scattering, Theory and application, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia*, pages 206–220.
- Lailly, P. (1984). The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations. In Bednar, R. & Weglein, éditeurs : *Conference on Inverse Scattering, SIAM, Philadelphia*, pages 206–220. Soc. Ind. appl. Math.

- Lamb, H. (1904). On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philos. Tran. R. Soc. London Ser., A* 203:1–42.
- Larmat, C., Montagner, J. P., Fink, M. & Capdeville, Y. (2006). Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great Sumatra earthquake. *Geophysical Research Letters*, 33:L19312.
- Lee, H.-Y., Koo, J. M., Min, D.-J., Kwon, B.-D. & Yoo, H. S. (2008). Frequency-domain elastic full-waveform inversion for VTI media. *Geophysical Journal International*, in-pres.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, 53(11):1425–1436.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics.
- Lions, J. (1972). *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*. Springer Verlag, Berlin.
- Liu, Q. & Tromp, J. (2006). Finite-frequency kernels based on adjoint methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(6):2383–2397.
- Lohner, R. (1996). Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique. *Engineering with Computers*, 12:186–210.
- Lombard, B., Piraux, J., Gelis, C. & Virieux, J. (2008). Free and smooth boundaries in 2-D finite-difference schemes for transient elastic waves. *Geophys. J. Int.*, 172:252–261.
- Love, A. E. H. (1911). Theory of the propagation of seismic waves. *Some problemes of Geodynamics (in Geophysics reprint series (vol 24) : Classics of Elastic Wave Theory)*, pages 144–179.
- Luo, Y. & Schuster, G. T. (1990). Parsimonious staggered grid finite-differencing of the wave equation. *Geophysical Research Letters*, 17(2):155–158.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of Seismological Society of America*, 66:639–666.
- Malinowsky, M. & Operto, S. (2008). Quantitative imaging of the Permo-Mesozoic complex and its basement by frequency domain waveform tomography of wide-aperture seismic data from the Polish basin. *Geophysical Prospecting*, 56:805–825.

BIBLIOGRAPHIE

- Malinowsky, M., Ribodetti, A. & Operto, S. (2007). Multiparameter full-waveform inversion for velocity and attenuation - Refining the imaging of a sedimentary basin. *In Expanded Abstracts*, page P276.
- Manakou, M., Raptakis, D., Apostolidis, P., Chavez-Garcia, F. J. & Pitilakis, K. (2007). The 3D geological structure of the Mygdonian basin (Greece). *In Proceedings of the 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, paper No.1686*. ICEGE, Thessaloniki, Greece.
- Marfurt, K. (1984). Accuracy of finite-difference and finite-elements modeling of the scalar and elastic wave equation. *Geophysics*, 49:533–549.
- Mariotti, C. (2007). Lamb's problem with the lattice model Mka3D. *Geophys. J. Int.*, 171:857–864.
- Masson, Y. & Pride, S. (2010). Finite-difference modeling of Biot's poroelastic equations across all frequencies. *Geophysics*, 75(2):33–41.
- Maufroy, E. (2010). *Caractérisation et modélisation numérique de l'effet de site topographique 3D : application à la Grande Montagne de Rustrel, Vaucluse*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis.
- Maufroy, E., Cruz-Atienza, V., Etienne, V. & Gaffet, S. (2010a). Benefits of a statistical spectral ratio approach for 3D topographic site effect assessment. *In Expanded Abstracts, 32th Annual ESC Conference, Montpellier*. European Seismological Commission.
- Maufroy, E., Cruz-Atienza, V. M. & Gaffet, S. (2010b). Advantages of a statistical spectral ratio method for the assessment of 3D topographic site effect : a numerical study using the topography of the LSBB Underground Laboratory, Rustrel, France. submitted to *Earthquake Spectra*.
- Menke, W. & Abbott, D. (1990). *Geophysical Theory*. Columbia University Press, New York, USA.
- Mercerat, E. D., Vilotte, J. P. & Sanchez-Sesma, F. J. (2006). Triangular spectral element simulation of two-dimensional elastic wave propagation using unstructured triangular grids. *Geophysical Journal International*, 166:679–698.

- Meza-Fajardo, K. & Papageorgiou, A. (2008). A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media : Stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(4):1811–1836.
- Minkoff, S. E. (2002). Spatial parallelism of 3D finite difference velocity-stress elastic wave propagation code. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24:1–19.
- Minshull, T. A., Singh, S. C. & Westbrook, G. K. (1994). Seismic velocity structure at a gas hydrate reflector offshore western colombia, from full waveform inversion. *Journal of Geophysical Research*, 99(B3):4715–4734.
- Moczo, P., Ampuero, J. P., Kristek, J., Galis, M., Day, S. M. & Igel, H. (2005). The European Network SPICE Code Validation. *In EOS Trans. AGU, abstract S13A-0180*. American Geophysical Union, San Francisco, USA.
- Moczo, P., Kristek, J., Franek, P., Chaljub, E., Bard, P.-Y., Tsuno, S., Iwata, T., Iwaki, A., Priolo, E., Klin, P., Aoi, S., Mariotti, C., Bielak, J., Taborda, R., Karaoglu, H., Etienne, V. & Virieux, J. (2010a). Numerical Modeling of Earthquake Ground Motion in the Mygdonian Basin, Greece : Verification of the 3D Numerical Methods. *In Expanded Abstracts, SSA 2010 Conference, Portland*. Seismological Society of America.
- Moczo, P., Kristek, J., Galis, M. & Pazak, P. (2010b). On accuracy of finite-difference and finite-element schemes with respect to P-wave and S-wave speed ratio. *Geophys. J. Int.*, 182:493–510.
- Moczo, P., Kristek, J., Galis, M., Pazak, P. & Balazovjeh, M. (2007). The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion. *Acta Physica Slovaca*, 52(2):177–406.
- Moczo, P., Kristek, J. & Halada, L. (2004). *The Finite-Difference Method for Seismologists An Introduction*. Comenius University Bratislava.
- Moczo, P., Kristek, J., Vavrycuk, V., Archuleta, R. & Halada, L. (2002). 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 92:3042–3066.
- Mora, P. (1988). Elastic wavefield inversion of reflection and transmission data. *Geophysics*, 53:750–759.

BIBLIOGRAPHIE

- Mora, P. (1989). Inversion = migration + tomography. *Geophysics*, 54(12):1575–1586.
- Mora, P. R. (1987). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multi-offset seismic data. *Geophysics*, 52:1211–1228.
- Morency, C. & Tromp, J. (2008). Spectral-element simulations of wave propagation in porous media. *Geophysical Journal International*, 175:301–345.
- Mulder, W. & Plessix, R.-E. (2008). Exploring some issues in acoustic full waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, 56(6):827–841.
- Munjiza, A. (2004). *The combined Finite-Discrete element method*. Wiley and Sons, London.
- Nazarian, S. & Stokoe, K. H. (1984). In situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves. *Proc. 8th Conf. on Earthquake Eng., San Francisco*, 3:31–38.
- Neves, F. A. & Singh, S. C. (1996). Sensitivity study of seismic reflection/refraction data. *Geophysical Journal International*, 126(2):470–476.
- Nihei, K. T. & Li, X. (2007). Frequency response modelling of seismic waves using finite difference time domain with phase sensitive detection (TD-PSD). *Geophysical Journal International*, 169:1069–1078.
- Nocedal, J. & Wright, S. J. (1999). *Numerical Optimization*. New York, US : Springer.
- Nolet, G. (2008). *A Breviary of Seismic Tomography*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Nordström, J., Forsberg, K., Adamsson, C. & Eliasson, P. (2003). Finite volume methods, unstructured meshes and strict stability for hyperbolic problems. *Applied Numerical Mathematics*, 45:453–473.
- Ohminato, T. & Chouet, B. A. (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 87:494–515.
- Olsen, K. B. (2000). Site amplification in the Los Angeles basin from three-dimensional modeling of ground motion. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 90:S77–S94.
- Operto, S., Ravaut, C., Imbrota, L., Virieux, J., Herrero, A. & Dell’Aversana, P. (2004). Quantitative imaging of complex structures from multi-fold wide aperture seismic data. *Geophysical Prospecting*, 52:625–651.

- Operto, S., Virieux, J., Amestoy, P., L'Écellent, J.-Y., Giraud, L. & Ben Hadj Ali, H. (2007). 3D finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver : A feasibility study. *Geophysics*, 72(5):SM195–SM211.
- Operto, S., Virieux, J., Dessa, J. X. & Pascal, G. (2006). Crustal imaging from multifold ocean bottom seismometers data by frequency-domain full-waveform tomography : application to the eastern Nankai trough. *Journal of Geophysical Research*, 111(B09306):doi :10.1029/2005JB003835.
- Pasquetti, R. & Rapetti, F. (2006). Spectral element methods on unstructured meshes : Comparisons and recent advances. *Journal of Scientific Computing*, 27:377–387.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 54:468–488.
- Pelties, C., Käser, M., Hermann, V. & Castro, C. E. (2010). Regular versus irregular meshing for complicated models and their effect on synthetic seismograms. *Geophys. J. Int.*, 183(2):1031–1051.
- Piperno, S. (2008). Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems. *M2AN*, 40(5):815–841.
- Pitarka, A. (1999). 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 89(1):54–68.
- Plessix, R.-E. (2006). A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167(2): 495–503.
- Plessix, R. E. (2007). A Helmholtz iterative solver for 3D seismic-imaging problems. *Geophysics*, 72(5):SM185–SM194.
- Plessix, R. E. (2009). Three-dimensional frequency-domain full-waveform inversion with an iterative solver. *Geophysics*, 74(6):WCC53–WCC61.
- Plessix, R.-E., Baeten, G., de Maag, J. W., Klaassen, M., Rujie, Z. & Zhifei, T. (2010). Application of acoustic full waveform inversion to a low-frequency large-offset land data set. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 29(1):930–934.

BIBLIOGRAPHIE

- Plessix, R. E. & Perkins, C. (2010). Full waveform inversion of a deep water ocean bottom seismometer dataset. *First Break*, 28:71–78.
- Pratt, R. G. (1999). Seismic waveform inversion in the frequency domain, part I : theory and verification in a physic scale model. *Geophysics*, 64:888–901.
- Pratt, R. G. (2008). Waveform tomography - successes, cautionary tales, and future directions. In *70th Annual EAGE Conference & Exhibition, Roma*, pages WO11 – Full-Waveform Inversion : current status and perspectives.
- Pratt, R. G. & Goultly, N. R. (1991). Combining wave-equation imaging with travelttime tomography to form high-resolution images from crosshole data. *Geophysics*, 56(2): 204–224.
- Pratt, R. G., Hou, F., Bauer, K. & Weber, M. (2005). *Waveform tomography images of velocity and inelastic attenuation from the Mallik 2002 crosshole seismic surveys*. Geological survey of Canada.
- Pratt, R. G., Shin, C. & Hicks, G. J. (1998). Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 133:341–362.
- Pratt, R. G., Sirgue, L., Hornby, B. & Wolfe, J. (2008). Cross-well waveform tomography in fine-layered sediments - meeting the challenges of anisotropy. In *70th Annual EAGE Conference & Exhibition, Roma*, page F020.
- Pratt, R. G., Song, Z. M. & Warner, M. (1996). Two-dimensional velocity models from wide-angle seismic data by wavefield inversion. *Geophysical Journal International*, 124:323–340.
- Pratt, R. G. & Worthington, M. H. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part I : acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 38:287–310.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3 édition.
- Prieux, V., Operto, S., Lambaré, G. & Virieux, J. (2010). Building starting model for full waveform inversion from wide-aperture data by stereotomography. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 29(1):988–992.

- Priolo, E., Carcione, J. M. & Seriani, G. (1994). Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. acoust. Soc. Am.*, 95:681–693.
- Pyun, S., Shin, C. & Bednar, J. B. (2007). Comparison of waveform inversion, part 3 : amplitude approach. *Geophysical Prospecting*, 55(4):477–485.
- Raptakis, D. G., Manakou, M. V., Chavez-Garcia, F. J., Makra, K. A. & Pitilaks, K. D. (2005). 3D configuration of Mygdonian basin and preliminary estimate of its site response. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25:871–887.
- Ravaut, C., Operto, S., Improta, L., Virieux, J., Herrero, A. & dell’Aversana, P. (2004). Multi-scale imaging of complex structures from multi-fold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-wavefield inversions : application to a thrust belt. *Geophysical Journal International*, 159:1032–1056.
- Rayleigh, L. (1887). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society (in Geophysics reprint series (vol 24) : Classics of Elastic Wave Theory)*, 17:4–11.
- Reed, W. & Hill, T. (1973). Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory.
- Remaki, M. (2000). A new finite volume scheme for solving Maxwell’s system. *COMPEL*, 19(3):913–931.
- Ribodetti, A. & Virieux, J. (1996). Asymptotic theory for imaging the attenuation factors Q_p and Q_s . In *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction, Proceedings, Aix-les-Bains, France 1996*, pages 334–353. Springer-Verlag.
- Ritz, W. (1909). Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik*, 18(4):737–807.
- Riyanti, C. D., Erlangga, Y. A., Plessix, R. E., Mulder, W. A., Vuik, C. & Oosterlee, C. (2006). A new iterative solver for the time-harmonic wave equation. *Geophysics*, 71(E):57–63.
- Robertsson, J. O. A. (1996). A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, 61:1921–1934.

- Roden, J. A. & Gedney, S. D. (2000). Convolution PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, 27(5):334–339.
- Romdhane, A., Grandjean, G., Brossier, R., Réjiba, F., Operto, S. & Virieux, J. (2010). Shallow structures characterization by 2d elastic waveform inversion. *Geophysics*, in press.
- Royer, D. & Dieulesaint, E. (1997). *Ondes élastiques dans les solides*. Masson.
- Saenger, E. & Bohlen, T. (2004a). Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. 69:583–591.
- Saenger, E. H. & Bohlen, T. (2004b). Finite-difference modelling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics*, 69:583–591.
- Sears, T., Singh, S. & Barton, P. (2008). Elastic full waveform inversion of multi-component OBC seismic data. *Geophysical Prospecting*, 56(6):843–862.
- Sen, M. & Stoffa, P. (1991). Non-linear one-dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing. *Geophysics*, 56:1624–1638.
- Sen, M. K. & Stoffa, P. L. (1995). *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*. Elsevier Science Publishing Co.
- Seriani, G. & Priolo, E. (1994). Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite elements in analysis and design*, 16:337–348.
- Shah, N. K., Warner, M. R., Guasch, L., Stekl, I. & Umpleby, A. P. (2010). Waveform inversion of surface seismic data without the need for low frequencies. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 29(1):2865–2869.
- Shaw, P. R. & Orcutt, J. A. (1985). Waveform inversion of seismic refraction data and applications to young pacific crust. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 82:375–414.
- Shearer, P. M. (2009). *Introduction to seismology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Sheng, J., Leeds, A., Buddensiek, M. & Schuster, G. T. (2006). Early arrival waveform tomography on near-surface refraction data. *Geophysics*, 71(4):U47–U57.

- Shephard, M. S. & Georges, M. K. (1991). Three-dimensional Mesh Generation by Finite Octree Technique. *J. Numer. Methods in Engineer*, 32:709–749.
- Shewchuk, J. R. (1998). Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement. *In Proceedings of the 14th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 86–95. SCG, Minneapolis.
- Shi, Y., Zhao, W. & Cao, H. (2007). Nonlinear process control of wave-equation inversion and its application in the detection of gas. *Geophysics*, 72(1):R9–R18.
- Shin, C. & Cha, Y. H. (2008). Waveform inversion in the Laplace domain. *Geophysical Journal International*, 173(3):922–931.
- Shin, C. & Ha, Y. H. (2008). A comparison between the behavior of objective functions for waveform inversion in the frequency and Laplace domains. *Geophysics*, 73(5):VE119–VE133.
- Shin, C. & Ha, Y. H. (2009). Waveform inversion in the Laplace-Fourier domain. *Geophysical Journal International*, 177:1067–1079.
- Shin, C., Jang, S. & Min, D. J. (2001a). Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory. *Geophysical Prospecting*, 49:592–606.
- Shin, C. & Min, D.-J. (2006). Waveform inversion using a logarithmic wavefield. *Geophysics*, 71(3):R31–R42.
- Shin, C., Min, D.-J., Marfurt, K. J., Lim, H. Y., Yang, D., Cha, Y., Ko, S., Yoon, K., Ha, T. & Hong, S. (2002). Traveltime and amplitude calculations using the damped wave solution. *Geophysics*, 67:1637–1647.
- Shin, C., Pyun, S. & Bednar, J. B. (2007). Comparison of waveform inversion, part 1 : conventional wavefield vs logarithmic wavefield. *Geophysical Prospecting*, 55(4):449–464.
- Shin, C., Yoon, K., Marfurt, K. J., Park, K., Yang, D., Lim, H. Y., Chung, S. & Shin, S. (2001b). Efficient calculation of a partial derivative wavefield using reciprocity for seismic imaging and inversion. *Geophysics*, 66(6):1856–1863.
- Shipp, R. M. & Singh, S. C. (2002). Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data. *Geophysical Journal International*, 151:325–344.

- Si, H. (2006). *TetGen - A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator - Version 1.4*. University of Berlin.
- Si, H. & Gärtner, K. (2005). Meshing Piecewise Linear Complexes by Constrained Delaunay Tetrahedralizations. *In Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable, San Diego*, pages 147–163. IMR, San Diego.
- Sirgue, L. (2006). The importance of low frequency and large offset in waveform inversion. *In 68th Annual EAGE Conference & Exhibition, London*, page A037.
- Sirgue, L., Barkved, O. I., Dellinger, J., Etgen, J., Albertin, U. & Kommedal, J. H. (2010). Full waveform inversion : the next leap forward in imaging at Valhall. *First Break*, 28:65–70.
- Sirgue, L., Barkved, O. I., Gestel, J. P. V., Askim, O. J. & Kommedal, J. H. . (2009). 3D waveform inversion on Valhall wide-azimuth OBC. *In 71th Annual International Meeting, EAGE, Expanded Abstracts*, page U038.
- Sirgue, L., Etgen, J. T. & Albertin, U. (2008). 3D Frequency Domain Waveform Inversion using Time Domain Finite Difference Methods. *In Proceedings 70th EAGE, Conference and Exhibition, Roma, Italy*, page F022.
- Sirgue, L. & Pratt, R. G. (2004). Efficient waveform inversion and imaging : a strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, 69(1):231–248.
- Smith, T. M., Collis, S. S., Ober, C. C., Overfelt, J. R. & Schwaiger, H. F. (2010). Elastic Wave Propagation in Variable Media using a Discontinuous Galerkin Method. *In Expanded Abstracts, 80th Annual SEG Conference & Exhibition, Denver*. Society of Exploration Geophysics.
- Soubier, F., Operto, S., Virieux, J., Amestoy, P. & L'Excellent, J.-Y. (2009). Fwt2d : A massively parallel program for frequency-domain full-waveform tomography of wide-aperture seismic data—part 2 : Numerical examples and scalability analysis. *Computers & Geosciences*, 35(3):496 – 514.
- Tago, J., Cruz-Atienza, V. M., Etienne, V., Virieux, J., Benjema, M. & Sanchez-Sesma, F. J. (2010). 3D dynamic rupture with anelastic wave propagation using an hp-adaptive Discontinuous Galerkin method. *In EOS Trans. AGU, abstract S51A-1915*. American Geophysical Union, San Francisco, USA.

- Tape, C., Liu, Q., Maggi, A. & Tromp, J. (2009). Adjoint Tomography of the Southern California Crust. *Science*, 325(5943):088.
- Tape, C., Liu, Q., Maggi, A. & Tromp, J. (2010). Seismic tomography of the southern california crust based on spectral-element and adjoint methods. *Geophysical J. Int.*, 180:433–462.
- Tarantola, A. (1984). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49(8):1259–1266.
- Tarantola, A. (1986). A strategy for non linear inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, 51(10):1893–1903.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, New York.
- Toksöz, M. N. & Johnston, D. H. (1981). *Geophysics reprint series, No. 2 : Seismic wave attenuation*. Society of exploration geophysicists, Tulsa, OK.
- Toro, E. F. & Titarev, V. A. (2002). Solution of the genralized Riemann problem for advection-reaction equations. *Proc. Roy. Soc. London*, 458:271–281.
- Toulopoulos, I. & Ekaterinaris, J. A. (2006). High-order discontinuous Galerkin discretizations for computational aeroacoustics in complex domains. *AIAA J.*, 44:502–511.
- Tromp, J., Tape, C. & Liu, Q. (2005). Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, 160:195–216.
- Vigh, D. & Starr, E. W. (2008). 3D prestack plane-wave, full-waveform inversion. *Geophysics*, 73(5):VE135–VE144.
- Viktorov, I. A. (1967). *Rayleigh and Lamb Waves : physical theory and applications*. Plenum Press, New York.
- Vilotte, J., Festa, G. & Madariaga, R. (2005). Spectral element simulations of rupture dynamics along kinked faults. *In EOS Transactions*, volume 86. American Geophysical Union, San Francisco, USA.
- Virieux, J. (1984). SH wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 49:1259–1266.

BIBLIOGRAPHIE

- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 51:889–901.
- Virieux, J. & Operto, S. (2009). An overview of full waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6)(6):WCC127–WCC152.
- Wang, Y., Xu, J. & Schuster, G. T. (2001). Viscoelastic wave simulation in basins by a variable-grid finite-difference method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 91:1741–1749.
- Wenk, S., Käser, M. & Igel, H. (2010). The discontinuous Galerkin finite element method and its application to global wave propagation. In *EOS Trans. AGU, abstract S53F-02*. American Geophysical Union, San Francisco, USA.
- Wenzlau, F. & Muller, T. (2009). Finite-difference modeling of wave propagation and diffusion in poroelastic media. *Geophysics*, 74(4):55–66.
- Wilcox, L. C., Stadler, G., Burstedde, C. & Ghattas, O. (2010). A High-Order Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Through Coupled Elastic-Acoustic Media. *Journal of Computational Physics*, 229(24):9373–9396.
- Williamson, P. (1991). A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography. *Geophysics*, 56:202–207.
- Williamson, P. R. & Worthington, M. H. (1993). Resolution limits in ray tomography due to wave behavior : Numerical experiments. *Geophysics*, 58:727–735.
- Wilson, D. C. & Pavlis, G. L. (2000). Near-surface site effects in crystalline bedrock : a comprehensive analysis of spectral amplitudes determined from a dense, three-component seismic array. *Earth Interactions*, 4:1–31.
- Woodwards, M. J. (1992). Wave-equation tomography. *Geophysics*, 57:15–26.
- Wu, R.-S. & Toksöz, M. N. (1987). Diffraction tomography and multisource holography applied to seismic imaging. *Geophysics*, 52:11–25.
- Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 14:302–307.
- Zelt, C. A., Pratt, R. G., Benders, A. J., Hanson-Hedgecock, S. & Hole, J. A. (2005). Advancements in long-offset seismic imaging : a blind test of traveltime and waveform tomography. *EOS. Transactions AGU*, 86(18):Abstract S52A–04.

Zienkiewicz, O. & Taylor, R. (1967). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. McGraw Hill, New York.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, London. 6th edition.

Annexe A

Compléments sur la formulation GD

A.1 Élément de référence

Afin de rendre les calculs génériques à tous les éléments, les méthodes EF reposent sur la concept d'élément de référence. Il existe une transformation permettant de passer des coordonnées globales aux coordonnées locales associées à l'élément de référence. Dans le cas 1D, cet élément est le segment $[-1 \ 1]$ et nous avons :

$$\xi = 2 \frac{x - x_i^g}{x_i^d - x_i^g} - 1, \quad (\text{A.1})$$

où x est la coordonnée globale, x_i^g et x_i^d sont les coordonnées des extrémités de l'élément et ξ est la coordonnée au sein de l'élément de référence qui varie de 0 à 1. L'intérêt du changement de coordonnée (A.1) est de généraliser le calcul d'intégrale de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma_i} u(x) dx = \int_{\Gamma_{ref}} u(\xi) |J| d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Le second terme de l'expression (A.2) peut se calculer avec des règles de quadrature que nous détaillerons plus loin. J est la matrice Jacobienne du changement de coordonnée et nous avons :

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{L_i}{2} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Fonctions de base Lagrangiennes

Au sein de l'élément de référence, on peut définir les fonctions de base Lagrangiennes avec des noeuds équidistants de la manière suivante :

pour l'approximation P_0 :

$$\varphi_1 = 1, \quad (\text{A.4})$$

pour l'approximation P_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1-x}{2} \\ \varphi_2 &= \frac{1+x}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

et enfin, pour l'approximation P_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -x\left(\frac{1-x}{2}\right) \\ \varphi_2 &= 4\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right) \\ \varphi_3 &= x\left(\frac{1+x}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.3 Calcul des matrices

Le calcul de l'intégrale (A.2) peut s'effectuer à l'aide de règles de quadrature de type Gauss-Legendre (Gauss, 1815), qui s'écrivent comme suit :

$$\int_{\Gamma_{ref}} u(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_{GL}} \omega_i u(\xi_i), \quad (\text{A.7})$$

où ω_i sont les poids associés aux points de Gauss-Legendre de coordonnées ξ_i . Ces intégrales sont exactes pour des fonctions u polynômiales à condition que N_{GL} , le nombre de points de la quadrature soit suffisant. En effet, la quadrature est exacte pour des polynômes de degré maximal $2N_{GL} - 1$. Les règles de quadrature sont des éléments essentiels des méthodes EF et l'on peut trouver des règles spécifiques selon le type d'élément à intégrer. Pour le segment 1D, la quadrature à 3 points de Gauss-Legendre permet de calculer les matrices de la formulation GD pour des éléments P_k avec $k \leq 2$. Cette quadrature

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{5}{9} & \xi_i &= -\sqrt{\frac{3}{5}} \\
\omega_2 &= \frac{8}{9} & \xi_i &= 0 \\
\omega_3 &= \frac{5}{9} & \xi_i &= \sqrt{\frac{3}{5}}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

La matrice de masse est donnée par :

$$(\mathcal{K}_i)_{rj} = \int_{\Omega_i} \varphi_{ir} \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i]. \tag{A.9}$$

En utilisant la règle de quadrature (A.8), nous obtenons pour P_0 :

$$\mathcal{K}_i = L_i, \tag{A.10}$$

pour P_1 :

$$\mathcal{K}_i = \frac{L_i}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{A.11}$$

et pour P_2

$$\mathcal{K}_i = \frac{L_i}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{A.12}$$

La matrice de raideur est donnée par :

$$(\mathcal{E}_i)_{rj} = \int_{\Omega_i} (\partial_x \varphi_{ir}) \varphi_{ij} dx \quad j, r \in [1, d_i], \tag{A.13}$$

En utilisant la règle de quadrature (A.8), nous obtenons pour P_0 :

$$\mathcal{E}_i = 0, \tag{A.14}$$

pour P_1 :

$$\mathcal{E}_i = \frac{L_i}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

et pour P_2

$$\mathcal{E}_i = \frac{L_i}{6} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Les matrices de flux \mathcal{F} sont données par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_i^g)_{rj} &= \int_{\Gamma_i^g} \varphi_{ir} \varphi_{ij} & j, r \in [1, d_i] \\ (\mathcal{F}_i^d)_{rj} &= \int_{\Gamma_i^d} \varphi_{ir} \varphi_{ij} & j, r \in [1, d_i]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Le calcul de ces matrices est trivial et nous obtenons pour P_0 :

$$\mathcal{F}_i^g = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_i^d = 1, \quad (\text{A.18})$$

pour P_1 :

$$\mathcal{F}_i^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

et pour P_2 :

$$\mathcal{F}_i^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

On dérive de manière similaire, l'expression des matrices de flux \mathcal{G} qui permettent la transition d'un ordre à un autre. Par exemple, les matrices de passage d'un élément P_2 (élément i) à un élément P_1 (élément k) s'écrivent :

$$\mathcal{G}_i^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_i^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Annexe B

Valorisation des compétences

Ce chapitre est le fruit d'une formation que j'ai suivie à la Chambre de Commerce et de l'Industrie (CCI) de Nice. Cette formation initiée par l'association Bernard Gregory, a pour but d'inciter les doctorants à réfléchir sur les compétences qu'ils ont développées pendant leur thèse et d'écrire un "nouveau chapitre de la thèse" (titre de la formation). J'ai écrit ce chapitre avec l'aide de Mme Nadja Hohweiller, formatrice de la CCI.

B.1 Cadre général et enjeux de la thèse

B.1.1 Présentation du projet de thèse

Le thème principal de ma thèse est l'imagerie sismique des milieux à 3 dimensions. Il correspond à un volet de recherche très actif en Sciences de la Terre. L'objectif visé dans ce travail doctoral est la reconstruction des propriétés physiques du sous-sol terrestre à partir de signaux sismiques enregistrés en surface. On peut établir une bonne analogie avec l'imagerie médicale réalisée par échographie qui reconstruit les propriétés du corps humain à l'aide d'ondes acoustiques. De même, nous pouvons réaliser des images du sous-sol terrestre en recueillant et analysant les ondes sismiques qui ont parcouru les différentes structures géologiques. Les enjeux sociétaux liés à l'imagerie sismique sont de première importance car ils concernent l'exploration et l'exploitation des ressources naturelles.

B.1.2 La thèse dans son contexte

La technique d'imagerie qui est au cœur de mon travail de thèse s'appelle l'inversion des formes d'ondes et apparaît comme une technique non conventionnelle ayant un important potentiel. C'est pourquoi, de nombreux acteurs industriels pétroliers ont investi ce champ de recherche afin d'améliorer leur technique d'investigation. J'ai eu la chance de mener ce projet au sein du consortium SEISCOPE qui compte parmi les plus importants industriels du secteur pétrolier : BP, CGG-VERITAS, ENI, EXXON-MOBIL, SHELL et TOTAL. Ce consortium est piloté par mes deux directeurs de thèse Stéphane Operto et Jean Virieux. C'est donc dans un contexte très motivant que s'est déroulé mon travail doctoral avec la possibilité d'avoir des échanges avec des spécialistes d'horizons variés.

J'ai effectué ma thèse au sein du laboratoire GEOAZUR situé à Sophia-Antipolis (Alpes -maritimes) qui regroupe l'Université de Nice Sophia-Antipolis, le CNRS et l'IRD. J'ai appartenu à l'équipe « Déformation, Onde et Rupture » du laboratoire renommée par la suite « Sismo ». Néanmoins, l'essentiel de mes interactions a eu lieu au sein du consortium SEISCOPE qui compte 3 membres permanents : Stéphane Operto, Alessandra Ribodetti et Jean Virieux et un nombre de doctorants variable selon les années. Les doctorants avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sont : Hafedh Ben Hadj Ali, Romain Brossier, Clara Castellanos, Yasser Gholami, Guanghui Hu, Yuelian Jia, Damien Pageot et Vincent Prioux. Chaque doctorant travaille sur un aspect spécifique de la technique d'imagerie par inversion des formes d'ondes et bénéficie du savoir faire des uns et des autres. Ceci crée une synergie dans le groupe qui se manifeste par des actions remarquées et récompensées par le monde industriel (Hafedh Ben Hadj Ali, Jean Virieux et Stéphane Operto ont obtenu le prix du meilleur article de l'année 2008 dans la revue *Geophysics*, revue qui occupe la première place parmi les journaux scientifiques spécialisés en géophysique appliquée au secteur pétrolier).

L'imagerie sismique des milieux en 3 dimensions par inversion des formes d'ondes relève d'un véritable challenge technologique. En effet, il est question de calculs conséquents qui nécessitent des plateformes de calcul haute performance. Nous avons le privilège d'avoir un laboratoire qui a accès à un important parc de calcul. En interne, GEOAZUR dispose de plusieurs clusters de calcul. Par cluster, il faut comprendre un groupe d'ordinateurs ou de processeurs permettant de traiter des problèmes en parallèle afin de réduire les temps de calculs. J'ai également largement profité du mésocentre de calcul de l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) qui dispose d'un cluster de 1000 processeurs géré par Alain Miniussi. Enfin, les modélisations de grande ampleur ont pu

être réalisées sur les plateformes de calcul de l'IDRIS/CNRS, qui est l'une des plus importantes puissances de calcul en France et dans le monde (environ 40 000 processeurs). L'accès à toutes ses plateformes a été crucial pour la réalisation de mon travail doctoral.

B.1.3 Moi dans ce contexte

Mon contexte personnel est tout à fait particulier dans la population des doctorants. En effet, j'ai fait le choix de reprendre des études en 2006 après presque 10 années d'activités professionnelles. Ingénieur INSA LYON de formation, j'ai obtenu mon diplôme en 1997 dans le domaine du génie physique des matériaux. J'ai par la suite intégré le secteur informatique en tant qu'ingénieur en développement logiciel au sein de sociétés de services à Paris puis à Sophia-Antipolis. En 2006, j'ai réalisé que l'informatique de gestion ne pouvait me satisfaire à long terme et j'ai donc engagé une réflexion sur les possibilités d'évolutions futures. Il m'est alors apparu très clairement qu'en accord avec ma formation scientifique, je souhaitais intégrer le monde de la recherche. Cette réflexion m'a également convaincu qu'il fallait s'appuyer sur les compétences que j'avais acquises lors de mes activités en entreprise et m'a conduit tout naturellement vers le calcul scientifique. C'est vers les Sciences de la Terre que je me suis orienté car c'est un secteur qui me semblait allier parfaitement recherche et informatique.

En 2006, j'ai déposé un dossier de congé individuel de formation auprès du FONGECIF PACA, après avoir obtenu l'autorisation d'absence de mon employeur, l'entreprise ADDAX (Sophia-Antipolis). Mon dossier a été retenu et en septembre 2006, je me suis trouvé à nouveau sur les bancs de l'école, inscrit en deuxième année du Master de recherche « Dynamique des Systèmes Géologiques et Aléas » de l'Université de Nice Sophia-Antipolis. Au cours de cette année d'étude, j'ai découvert tout un pan de la recherche actuelle sur les aspects liés à la propagation des ondes sismiques et leur traitement afin de recouvrer les structures du sol terrestre. Au cours du Master, j'ai fait la connaissance de Stéphane Operto et Jean Virieux. Nous nous sommes convaincus qu'une thèse était une bonne option au sein du consortium SEISCOPE. Et je dois dire, que je suis totalement satisfait de ce concours de circonstances qui m'a permis de mener à bien mon projet de « reconversion » même si les événements se sont enchaînés de manière logique et selon ma volonté. Il me faut aussi souligner, la détermination de mon épouse et la compréhension sans faille de mes 2 fils qui m'ont soutenu pendant cette reprise d'étude. Sans ce contexte familial fort, je ne me serais pas lancé dans une telle aventure.

B.2 Déroutement, gestion et coût du projet

B.2.1 Préparation et cadrage du projet

Le consortium SEISCOPE a été initié en 2006 et comptait à mon arrivée 2 étudiants : Hafedh Ben Hadj Ali et Romain Brossier qui travaillaient respectivement sur l'inversion des formes d'ondes dans les milieux acoustiques à 3 dimensions et les milieux élastiques à 2 dimensions. Mon travail s'est inscrit dans la continuité du travail de Romain Brossier avec une extension vers les milieux à 3 dimensions. L'aide de Romain Brossier qui possédait alors une année d'avance a été capitale et m'a permis de démarrer la thèse dans un cadre sécurisant.

D'un point de vue théorique, nous nous sommes basés sur des travaux précédents de groupes de recherche bien identifiés et sur l'expertise intra-muros du consortium. Fort de cette expérience, nous avons fait le choix de faire l'inversion dans le domaine fréquentiel qui est en quelque sorte la spécialité du consortium SEISCOPE. Cette démarche a été adoptée en particulier pour réduire les besoins en ressources informatiques.

B.2.2 Conduite du projet

Mon travail de thèse a initialement été planifié en 3 phases : La première est consacrée au développement d'un outil de modélisation des ondes sismiques adapté aux milieux géologiques en 3 dimensions. La deuxième est l'implémentation de cet outil dans un processus d'inversion des formes d'ondes afin de valider l'approche dans sa globalité à l'aide de cas synthétiques. Enfin, la dernière phase concerne l'application de cet ensemble à l'étude d'un cas réel à partir de données sismiques de terrain.

Pour satisfaire la réalisation de la première étape, nous nous sommes notamment appuyés sur l'expertise de l'équipe NACHOS de l'INRIA de Sophia-Antipolis, en particulier Nathalie Glinsky et Stéphane Lanteri, qui possède un savoir faire sur les méthodes par éléments finis discontinus que j'ai utilisées pour la modélisation des ondes sismiques. Le développement de l'outil de modélisation a été une tâche qui nécessita largement plus de temps que prévu et par conséquent, les 2 dernières phases de ma thèse n'ont pu être abordées complètement. Le développement méthodologique et les calculs réalisés avec l'outil de modélisation ont été l'objet de plusieurs présentations à des congrès internationaux (Society of Exploration Geophysicists (Etienne *et al.*, 2009b), European Association of Geoscientists and Engineers (Etienne *et al.*, 2008, 2009a, 2010d) et Seismological Society

of America (Etienne *et al.*, 2010b)) et la publication d'un article au journal Geophysical Journal International (Etienne *et al.*, 2010a). En ce qui concerne le volet inversion, j'ai eu l'occasion de présenter les principaux concepts de l'approche que nous avons développée à deux congrès internationaux (Society of Exploration Geophysicists (Etienne *et al.*, 2010e) et American Geophysical Union (Etienne *et al.*, 2010c)).

J'ai eu l'occasion de confronter ma méthode à d'autres approches lors du projet EUROSEISTEST, piloté entre-autre par Emmanuel Chaljub du laboratoire LGIT de Grenoble et organisé par le CEA, le LGIT, l'Université de Thessalonique et l'Institut Laue Langevin. Ceci fut l'occasion de tester mon outil de modélisation dans un cas test extrême lié à la caractérisation des effets de site dans un bassin sédimentaire situé en Gr ce. Dans cette étude, il s'agissait de prédire les mouvements du sol en fonction de scénarios sismiques (magnitudes et localisations des séismes) afin d'estimer les risques encourus par la population environnante. L'outil que j'ai développé ayant produit de bons résultats, j'ai pu ainsi démontrer la pertinence de mon approche. En dernière année, j'ai pu aborder la réalisation de la deuxième phase par la construction d'un prototype destiné à recevoir des améliorations futures. J'ai pu à partir de cet outil, valider le processus d'imagerie à l'aide de cas canoniques. La troisième phase sera entreprise par Guanghui Hu et Clara Castellanos, doctorants qui reprennent la suite de mon travail et qui bénéficieront de l'expérience du consortium. J'ai par ailleurs assuré une tâche d'encadrement de ces étudiants afin de les former à la modélisation, à l'inversion et à la mise en oeuvre de ces concepts sur le plan informatique.

Ma thèse fut rythm e par les réunions hebdomadaires du groupe SEISCOPE où chaque doctorant fait à tour de rôle un bilan sur l'avancée de son travail. Ces réunions ont constitué un véritable ciment centré sur les échanges scientifiques et ont permis de maintenir la cohésion du groupe. De plus, les congrès auxquels j'ai eu l'occasion de participer ont été aussi l'occasion de rencontrer des chercheurs de tous bords, du monde académique et industriel et de recueillir leur avis sur ma démarche. C'est ainsi que j'ai pu mesurer l'enjeu de ma thèse et cela a été très motivant de constater qu'il s'agissait d'un sujet porteur et innovant. Pour conclure sur ces événements qui ont ponctué ma thèse, je mentionnerai aussi les réunions annuelles du consortium SEISCOPE   Villefranche sur Mer qui rassemblent les principaux interlocuteurs des sponsors. Ces réunions permettent de rendre compte de l'avancée des travaux et sont l'occasion de recevoir l'avis des sponsors. Ceux-ci peuvent avoir une implication sur le travail des doctorants, en suggérant par exemple une alternative ou un scénario que nous avons occultés.

B.2.3 Evaluation et prise en charge du coût du projet

Le coût total de ma thèse a été estimé à environ 204 000 Euros et se répartit de la manière suivante :

Ressources humaines (69 %) qui regroupent mon salaire et les coût estimés concernant l'encadrement par mes directeurs de thèse, le suivi administratif, le support informatique et la bibliothèque. Mon salaire a été subventionné par le consortium SEISCOPE. Administrativement, j'ai eu un contrat CDD avec le CNRS pendant toute la durée de ma thèse.

Matériel (23 %) : J'ai utilisé environ 50 000 heures de calcul sur le cluster de l'OCA (coût horaire 3 centimes d'Euro) et environ 1,5 million d'heures sur la plateforme IBM Blue Gene de l'IDRIS (coût horaire identique de 3 centimes d'Euro).

Déplacements (5 %) : Les congrès à l'étranger comprennent 5 séjours aux Etats-Unis et 5 séjours en Europe.

Infrastructures (2 %) : Le coût de fonctionnement du laboratoire GEOAZUR à Sophia-Antipolis est de 75 000 Euros par an. Ma quote-part a été estimée au prorata du nombre de personnes présentes au laboratoire (70 personnes).

Autres (1 %) : Ces coûts représentent les consommables, la documentation et les formations.

B.3 Compétences, savoir-faire, qualités professionnelles et personnelles

B.3.1 Domaines d'expertises scientifique et technique

J'ai commencé cette thèse après un parcours atypique disposant déjà d'une expérience professionnelle significative et donc mon analyse ne se limite pas à ce que j'ai appréhendé pendant la thèse mais porte sur la manière dont cela s'articule avec mon parcours. Globalement, mon expérience professionnelle avant-thèse s'est concentrée sur le développement d'outils informatiques de gestion dans les domaines des télécoms, des transports aériens et des moteurs de recherche. J'ai donc acquis un savoir faire dans le développement informatique que ce soit sur le plan technique (langage de programmation, plateformes techniques) et sur le plan gestion de projet (phase d'analyse, validation

d'une application, pour ne citer que quelques aspects). J'ai tenté de concilier ce savoir-faire dans un contexte nouveau : celui du développement d'un outil d'imagerie dans un laboratoire de recherche en Sciences de la Terre.

Sur le plan scientifique, j'ai appréhendé des domaines inconnus mais pas totalement étrangers. Ainsi, pendant mon cursus en école d'ingénieur, j'avais déjà abordé la propagation des ondes dans un projet d'étude sur les matériaux. Ces connaissances théoriques m'ont permis d'aborder sereinement les aspects mathématiques de la propagation des ondes qui est au cœur de mon travail de thèse. L'un des aspects nouveaux les plus importants que j'ai pu acquérir est celui des méthodes numériques. Il s'agit de méthodes permettant de résoudre les équations de la physique comme celles de la propagation d'onde, de la chaleur, de l'écoulement d'un liquide, etc... Il s'agit donc d'une base théorique et puissante qui peut se décliner de nombreuses manières. Ce caractère multidisciplinaire dépasse largement le cadre des Sciences de la Terre et représente un atout précieux que je compte mettre à profit dans la suite de mon parcours professionnel. Les compétences spécifiques que j'ai développées ont attiré aux problèmes géophysiques et à l'imagerie sismique en particulier.

B.3.2 Méthodes de travail et gestion de l'information

Par rapport au monde de l'entreprise, les normes au sein d'un laboratoire de recherche académique ne sont pas les mêmes et j'ai donc été confronté au début à une phase d'observation afin de comprendre comment les chercheurs menaient leur travaux. J'ai constaté alors que le personnel de recherche était sans cesse en interaction avec des objets informatiques mais qu'il y avait peu de règles établies sur l'utilisation ou le développement de ces outils. Je citerai pour exemple, la gestion des codes sources. Dans la plupart des projets auxquels j'ai participé pendant mon activité professionnelle, les travaux des développeurs étaient archivés de manière précise et sécurisée afin d'assurer la pérennité des travaux. Il en va de même pour la documentation qui doit être explicite et accompagner chaque objet informatique. Dans une société de service informatique, cette tâche incombe au chef de projet qui doit mettre en place ces règles et assurer leur application pendant toutes les phases du projet. Dans un laboratoire de recherche, tel que celui qui m'a accueilli, les tâches ne sont pas aussi structurées et chaque chercheur s'organise à sa manière. Dans le but d'harmoniser et structurer notre travail au quotidien, j'ai pu convaincre mes directeurs de thèse des bienfaits d'un outil d'archivage. Ce dernier (l'outil SVN) est désormais plébiscité par l'ensemble des membres du groupe car

il permet un travail collaboratif efficace. Aussi, en m'appuyant sur mon expérience professionnelle passée, je pense disposer d'un point de vue unique qui me permet de cerner et combiner les avantages des mondes industriels et académiques.

B.3.3 Communication

J'ai enrichi ma communication orale et écrite en langue anglaise au travers de nombreuses présentations en congrès qui se sont déroulés essentiellement à l'étranger. J'ai été également amené à rédiger des résumés soumis à des comités de lecture, des rapports techniques destinés aux sponsors ainsi qu'un article. J'ai pu affûter mon analyse critique par le biais des lectures d'articles et d'échanges avec d'autres chercheurs ou doctorants.

B.3.4 Qualités professionnelles et personnelles

Outre les capacités que j'ai pu développer dans mon parcours professionnel antérieur, mon travail de thèse m'a amené à accroître mes capacités d'adaptation dans un contexte nouveau. J'ai développé spécifiquement au cours de ce doctorat un sens accru du travail d'équipe, que ce soit dans le cadre du consortium SEISCOPE ou du projet EUROSEISTEST. Par ailleurs, le développement d'un outil d'imagerie, m'a conduit constamment à rechercher et proposer des concepts innovants et à mettre à rude épreuve ma créativité pour opérer des choix pertinents.

B.4 Retombées et impacts de la thèse

B.4.1 Pour l'équipe et les partenaires du projet

Les retombées de mon travail sont multiples. En ce qui concerne la modélisation des ondes, l'outil que j'ai développé peut servir à de nombreuses études. On peut l'employer pour faire des études de risque sismique afin de prévoir les zones à risques élevés. Ce volet applicatif a été validé dans le cadre du projet EUROSEISTEST en collaboration avec d'autres équipes de recherche. En terme d'imagerie, le prototype que j'ai élaboré pendant ma dernière année de thèse suggère un fort potentiel notamment en vue d'applications dans le secteur pétrolier. Des applications peuvent également voir le jour dans le monde académique mais nous en sommes encore aux balbutiements.

B.4.2 Sur le plan professionnel et personnel

Je pense avoir comblé les souhaits qui avaient initié ma reprise d'étude il y a maintenant 4 années. J'ai l'avantage par rapport à d'autres doctorants d'avoir un passé professionnel que je compte mettre à profit. En effet, je dispose d'un profil qui associe des compétences en informatique avec des compétences en géophysique de haut niveau. Par conséquent, je privilégie les pistes professionnelles où ces deux compétences seront en adéquation : je pense en particulier à un poste de chercheur ou ingénieur de recherche dans le domaine de la géophysique que ce soit dans le secteur privé (Industries pétrolières, sociétés d'études géophysiques) ou académique (CNRS, universités, écoles d'ingénieur). Je n'exclus pas l'idée d'investir un autre domaine qui mobiliserait des compétences en calcul numérique. En effet, la modélisation numérique est un composant essentiel de la recherche scientifique et de ce fait ouvre de nombreuses perspectives dans des domaines variés tels que la mécanique des fluides, les matériaux, les prévisions météorologiques, la modélisation du système monétaire mondial...